Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2016
23.09.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Musterlösung

Aufgabe 1 (4 + 6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}.$$

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \frac{1}{x+1}y + \mathrm{e}^x y^2 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)}\right)\mathrm{e}^{-x}, \qquad x > -1$$
$$y(0) = \frac{5}{2},$$

an.
Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung (ohne Anfangswert) ist gegeben durch $\phi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - (1+\mathrm{i}))(\lambda - (1-\mathrm{i})),$$

die einfachen Nullstellen sind somit $1 \pm \mathrm{i}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet demnach

$$y_h(x) = C_1\mathrm{e}^x\cos(x) + C_2\mathrm{e}^x\sin(x).$$

Für die komplette Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet dieser Ansatz

$$y_p(x) = (Ax+B)\mathrm{e}^{2x},$$
$$y_p'(x) = (2Ax + A + 2B)\mathrm{e}^{2x},$$
$$y_p''(x) = 4(Ax + A + B)\mathrm{e}^{2x}.$$

Setzen wir dies in die ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir

$$2x\mathrm{e}^{2x} = y_p'' - 2y_p' + 2y_p = (2Ax + 2A + 2B)\mathrm{e}^{2x}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $2A = 2$ und $2A + 2B = 0$, also $A = 1$ und $B = -1$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x\cos(x) + C_2\mathrm{e}^x\sin(x) + (x-1)\mathrm{e}^{2x}.$$

b) Einsetzen von ϕ liefert

$$-\frac{1}{2}\mathsf{e}^{-x} - \frac{1}{2(x+1)}\mathsf{e}^{-x} + \frac{1}{4}\mathsf{e}^{-x} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)}\right)\mathsf{e}^{-x},$$

eine wahre Aussage. Es handelt sich um eine Riccatische Differentialgleichung. Die übliche Substitution $u = y - \phi$ ergibt für u die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' + (1 - \frac{1}{x+1})u + \mathsf{e}^x y^2 = 0, \quad u(0) = y(0) - \phi(0) = 2,$$

welche wiederum durch Multiplikation mit $-u^{-2}$ und die Substitution $z = u^{-1}$ in die lineare Differentialgleichung

$$z' = (1 - \frac{1}{x+1})z + \mathsf{e}^x, \quad z(0) = (u(0))^{-1} = \frac{1}{2},$$

übergeht. Um diese zu lösen benutzen wir die bekannte Formel und berechnen

$$A(x) = \int_0^x 1 - \frac{1}{s+1}\underset{\cdot}{s} = s - \log(s+1)|_{s=0}^{x} = x - \log(x+1).$$

Für den inhomogenen Teil benötigen wir noch den Term

$$\int_0^x \mathsf{e}^{-A(s)}\mathsf{e}^s\underset{\cdot}{s} = \int_0^x (s+1)\underset{\cdot}{s} = \frac{x^2}{2} + x.$$

Ingesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{2}\mathsf{e}^{A(x)} + \mathsf{e}^{A(x)}\int_0^x \mathsf{e}^{-A(s)}\mathsf{e}^s\underset{\cdot}{s} = \frac{\mathsf{e}^x}{2(x+1)} + \frac{\mathsf{e}^x}{x+1}\left[\frac{x^2}{2} + x\right] \\ &= \frac{\mathsf{e}^x}{2(x+1)}\left[x^2 + 2x + 1\right] = \frac{\mathsf{e}^x(x+1)}{2} \end{aligned}$$

und die Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \phi(x) + \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{2}\mathsf{e}^{-x} + \frac{2}{\mathsf{e}^x(x+1)} = \frac{1}{2\mathsf{e}^x}\left(1 + \frac{4}{x+1}\right) \qquad \forall x > -1.$$

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie mittels des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 + 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

das heißt geben Sie die Koeffizienten a_n explizit an.

Lösungsvorschlag: Zunächst drückt man alle in der Differentialgleichung auftauchenden Terme durch Potenzreihen aus:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ xy'(x) &= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

An dieser Stelle kann man die entstandenen Terme in die Gleichung einsetzen und die Koeffizienten vergleichen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} + n\,a_n + a_n\right)\, x^n = 1 + 2x.$$

Daraus folgt für $n = 0$ und $n = 1$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 \cdot a_2 + a_0 = 2\,a_2 + a_0 &= 1 \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 2 \cdot a_1 = 6\,a_3 + 2\,a_1 &= 2 \end{aligned}$$

und für alle $n \geqslant 2$:

$$(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} + (n+1)\,a_n = 0 \iff a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

Zur näheren Auflösung der Koeffizienten benötigt man nun die Anfangsbedingungen $y(0) = a_0 = 1$ und $y'(0) = a_1 = 0$. Daraus ergibt sich $a_2 = 0$ und dementsprechend $a_{2k} = 0\,\forall k \in \mathbb{N}$. Weiterhin folgt $a_3 = \frac{1}{3}$ und wie sich mit Induktion zeigen lässt

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j+1)}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Als Induktionsanfang verendet man dabei $n = 1$, womit sich der bereits bekannte Wert $a_3 = \frac{1}{3}$ ergibt. Unter der Induktionsvoraussetzung dass die Formel korrekt ist erhält man damit

$$a_{2(n+1)+1} = (-1)^{n+1+1} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(2j+1)} = \left((-1)\frac{1}{2(n+1)+1}\right) \cdot \underbrace{\left((-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j+1)}\right)}_{=a_{2n+1}}.$$

Daraus folgt letztlich der Induktionsschluss

$$a_{2(n+1)+1} = -\frac{a_{2n+1}}{2(n+1)+1} \iff a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - 2(x+1)xy'(x) + 2(x+1)y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = x$.

Lösungsvorschlag: Man benutzt den Ansatz $y = v \cdot y_1$ und erhält damit die folgende Gleichung:

$$x^2 \cdot (y_1'' \cdot v + 2y_1' \cdot v' + y_1 \cdot v'') - 2(x+1)x \cdot (y_1' \cdot v + y_1 \cdot v') + 2(x+1) \cdot y_1 \cdot v = 0.$$

Anders sortiert nach Ableitungen von y_1 und v ergibt sich

$$\underbrace{\left(x^2 y_1'' - 2(x+1)xy_1' + 2(x+1)y_1\right)}_{=0} \cdot v + 2x^2 y_1' \cdot v' + x^2 y_1 \cdot v'' - 2(x+1)xy_1 \cdot v' = 0.$$

Weil y_1 die Gleichung erfüllt ergibt die große Klammer 0. Setzt man in den verbleibenden Teil der Gleichung $y_1(x) = x$ und $y_1'(x) = 1$ ein, dann folgt

$$\left(2x^2 - 2(x+1)x^2\right) \cdot v'(x) + x^3 \cdot v''(x) = -2x^3 \cdot v'(x) + x^3 \cdot v''(x) = 0.$$

Da die ursprüngliche Differentialgleichung für $x > 0$ definiert war lässt sich x kürzen und man erhält

$$v''(x) = 2v'(x) \iff v'(x) = C\mathsf{e}^{2x} \iff v(x) = \frac{C}{2}\mathsf{e}^{2x} + D.$$

Entsprechend lautet die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y(x) = y_1(x) \cdot v(x) = \tilde{C}x\mathsf{e}^{2x} + Dx \ , \tilde{C} := \frac{C}{2} \ , C, D \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (7 + 3 Punkte)

a) **(i)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

<u>Hinweis</u>: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1), \lambda \in \mathbb{R}$, wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

Lösungsvorschlag: Zunächst betrachtet man den Eigenwert $\lambda = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 1:

$$(A+I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff v_1 + v_3 = 0 \text{ und } 3v_3 - v_2 = 0.$$

Das liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Da in diesem Fall geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen kann man nun direkt zum nächsten Eigenwert $\lambda = 1$ übergehen:

$$(A-I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \vec{v} \in \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies lässt sich nach einer kleinen Umstellung mit dem (-1)-Trick lösen:

$$\begin{aligned} \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \quad + \\ \cdot(-2) \end{array} &= \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \\ \mid \cdot(-1) \end{array} \\ &= \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Das liefert die den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_2(t) = \mathsf{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da es keinen anderen linear unabhängingen Eigenvektor gibt, aber die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 2 ist, müssen wir eine zusätzliche Lösung finden. Dafür lösen wir die Gleichung

$$(A - I)\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff -w_1 + w_3 = 0 \text{ und } -w_2 + w_3 = 0.$$

Das führt zum Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und liefert die Lösung

$$\phi_3(t) = \mathsf{e}^t(\vec{w} + t \cdot (A - I)\vec{w}) = \mathsf{e}^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathsf{e}^t \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $\phi_j, j = 1, 2, 3$ bilden ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

(ii) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) = 2w_1'(t) - w_2(t), \\ w_2'(t) = w_1(t) - w_2(t) + w_1'(t), \end{cases} \tag{1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **(i)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) an.

Lösungsvorschlag: Wir führen die Variable $w_3 = w_1'$ ein. Dann bekommen wir

$$\begin{cases} w_1'(t) = w_3(t) \\ w_2'(t) = w_1(t) - w_2(t) + w_3(t) \\ w_3'(t) = w_1''(t) = -w_2(t) + 2w_3(t) \end{cases} \iff \begin{cases} w_1' = w_3 \\ w_2' = w_1 - w_2 + w_3 \\ w_3' = -w_2 + 2w_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

was dem Differentialgleichungssystem aus Teil **(i)** entspricht. Die allgemeine Lösung davon ist wegen des Teiles (i)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} C_j \phi_j(t) = C_1 \mathsf{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathsf{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathsf{e}^t \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}.$$

Deshalb lautet die allgemeine Lösung von (1)

$$\begin{cases} w_1(t) = C_1 \mathsf{e}^{-t} + C_2 \mathsf{e}^t + C_3 \mathsf{e}^t (1+t) \\ w_2(t) = -3C_1 \mathsf{e}^{-t} + C_2 \mathsf{e}^t + C_3 (2+t) \mathsf{e}^t. \end{cases}$$

b) Wir betrachten die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass $\mathsf{e}^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag: Man verwendet die aus der Vorlesung bekannte Formel. Deshalb gilt

$$\vec{y}(t) = \mathsf{e}^{Bt}\, \vec{y}(0) + \mathsf{e}^{Bt} \int_0^t \mathsf{e}^{-Bs} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

Setzt man ein ergibt sich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + \mathsf{e}^{Bt} \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) \\ -\sin(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s}_{= \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix}},$$

sodass durch Ausführen der Multiplikation und Addition gilt:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 + \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi, t), & \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t), \quad t > 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen u des Randwertproblems der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$.

Lösungsvorschlag:

$$u(x,t) = v(x)w(t) \Rightarrow \frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda.$$

Fall 1: $\lambda = d^2 > 0$: $\quad v''(x) = d^2 v(x) \Rightarrow v(x) = C_1 \, \mathsf{e}^{dx} + C_2 \, \mathsf{e}^{-dx}$

$$v(0) = v(\pi) \Rightarrow C_1 + C_2 = C_1 \, \mathsf{e}^{d\pi} + C_2 \, \mathsf{e}^{-d\pi}$$

$$\Rightarrow C_1(1 - \mathsf{e}^{d\pi}) + C_2(1 - \mathsf{e}^{-d\pi}) = 0 \tag{1}$$

$$v'(0) = v'(\pi) \Rightarrow d\,(C_1 - C_2) = d\,(C_1 \mathsf{e}^{d\pi} - C_2 \mathsf{e}^{-d\pi})$$

$$\Rightarrow C_1\,(1 - \mathsf{e}^{d\pi}) + C_2\,(-1 + \mathsf{e}^{-d\pi}) = 0. \tag{2}$$

Da $\begin{vmatrix} 1 - \mathsf{e}^{d\pi} & 1 - \mathsf{e}^{-d\pi} \\ 1 - \mathsf{e}^{-d\pi} & -1 + \mathsf{e}^{-d\pi} \end{vmatrix} = -2\mathsf{e}^{d\pi} \neq 0$, folgt aus dem System (1), (2) nur die trivialle Lösung $C_1 = C_2 = 0$ hat.

Fall 2: $\lambda = -d^2 > 0, \ d > 0$:

$$v''(x) = -d^2 v(x) \Rightarrow v(x) = C\cos(dx) + D\sin(dx)$$

$$v(0) = v(\pi) \Rightarrow C = C\cos(d\pi) + D\sin(d\pi)$$

$$\Rightarrow C(1 - \cos(d\pi) - D\sin(d\pi) = 0 \tag{3}$$

$$v'(0) = v'(\pi) \Rightarrow Dd = -Cd\sin(d\pi) + Dd\cos(d\pi)$$

$$\Rightarrow C\sin(d\pi) + D\,(1 - \cos(d\pi)) = 0 \tag{4}$$

Da $\begin{vmatrix} 1 - \cos(d\pi) & -\sin(d\pi) \\ \sin(d\pi) & 1 - \cos(d\pi) \end{vmatrix} = (1 - \cos(d\pi))^2 + (\sin(d\pi))^2$ hat das System (3), (4) nur dann nicht triviale Lösungen, wenn $1 - \cos(d\pi) = 0$, $\sin(d\pi) = 0 \Leftrightarrow d\pi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall können C und D frei gewählt werden, was die Lösung

$$v_k(x) = C_k \cos(2kx) + D_k \sin(2kx)$$

liefert. Dann gilt aber auch

$$\frac{w_k'(t)}{w_k(t)} = (2k)^2 \Rightarrow w_k(t) = \mathsf{e}^{-4k^2\,t}.$$

Deshalb bekommen wir die Lösung

$$u_k(x,t) = \mathsf{e}^{-4k^2\,t}\,(C_k\cos(2kx) + D_k\sin(2kx)) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Fall 3 $\lambda = 0$ Dann $v''(x) = 0$ und deshalb $v(x) = Cx + D$. Aus $v(0) = v(\pi)$ folgt, dass $C = 0$. Also ist v konstant und die Bedingung $v'(0) = v'(\pi)$ wird erfüllt. In diesem Fall haben wir auch $w'(t) = 0$ so dass w auch konstant ist. Das liefert die Konstante Lösung $u(x,t) = c$.

b) Lösen Sie das obige Randwertproblem mit der zusätzlichen Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(2x) + \cos(4x), \quad x \in [0,\pi].$$

Lösungsvorschlag: Aus Teil a) folgt, dass eine Lösung des Randwertproblems die Form

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{e}^{-4k^2t}\,(C_k\cos(2kx) + D_k\sin(2kx))$$

hat. Für $t = 0$ erhält man:

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k\cos(2kx) + D_k\sin(2kx))$$

Die geforderte Randbedingung bekommt man durch Wahl der Konstanten zu:
$D_1 = 1;\ C_2 = 1;\ D_k = 0\ \forall k \neq 1;\ C_k = 0\ \forall k \neq 2.$
Die Lösung des Randwertproblems ergibt sich damit zu

$$u(x,t) = \mathsf{e}^{-4t}\,\sin(2x) + \mathsf{e}^{-16t}\cos(4x).$$