Zusammenfassung der Hauptthemen der Vorlesung

In dieser Vorlesung werden Differentialgleichungen beigebracht. Es gibt zwei Arten von Differentialgleichungen: die gewöhnlichen Differentialgleichungen und die partiellen Differentialgleichungen. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen unterscheiden sich von den partiellen Differentialgleichungen, weil sie partielle Ableitungen enthalten. Beispiele einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist $y'(x) = y(x)$. Beispiel einer partiellen Differentialgleichung ist die Gleichung $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Der erste Teil der Vorlesung besteht aus gewöhnlichen Differentialgleichungen und der zweite aus partiellen Differentialgleichungen. Der zweite Teil wird später presentiert werden. Wir geben unten eine Liste mit Gleichungen, die wir diskutieren werden ohne genaue Definitionen.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Trennung von Variablen

$$y' = f(x)g(y).$$

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha} = 0.$$

Riccati-Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x).$$

Exakte und nicht exakte Differentialgleichungen

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$\underbrace{y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y}_{=:Ly} = f(x), \quad x \in I.$$

Die lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Verfahren von d'Alembert Sei y_1 eine Lösung der Gleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

Der Ansatz $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ für eine zweite Lösung der Gleichung führt auf

$$v'' + v'\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right) = \frac{f(x)}{y_1(x)}.$$

Das heißt Reduktion der Ordnung.

Die Eulersche Differentialgleichung

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0.$$

Potenzreihenansatz Für eine lineare Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

mit $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$, führt man einen Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

und mit Koeffizientenvergleich auf (lineare) Rekursionsformeln für die Koeffizienten c_j.

Es gibt auch den abgewandeten Potenzreihenansatz, wo man annimt, dass

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Das Problem Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir schreiben Punkte aus D als $(x, \vec{y})$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und wir werden die folgende Gleichung betrachten

$$\vec{y}\,' = F(x, \vec{y}). \tag{1}$$

Entsprechend werden wir Anfangswertprobleme betrachten.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf Seien D und F wie oben, sowie $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Wir werden die Existenz und eindeutigkeit des folgenden Anfangswertproblems diskutieren

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{y}\,' &=& F(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) &=& \vec{y}_0 \end{array}\right\}$$

Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten Sind von der Art

$$\begin{aligned} \vec{y}\,' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0, \end{aligned}$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Sind von der Art

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Das System kann gelöst werden mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion:

$$\exp(tA) := e^{tA} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l}{l!}.$$

Eine Zusammenfassung der partiellen Differentialgleichungen kommt im Lauf des Semesters.