Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

WS 2019/2020
28.02.2020

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (10 + 10 = 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems auf einem möglichst großen Interval

$$\begin{aligned} y' &= -y - e^x y^2, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' - xy' - y &= 3 \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Geben Sie dabei die Koeffizienten a_n explizit an.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Dies ist eine homogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = -y^{-2}y'.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für y' folgt nun:

$$z' = -y^{-2}y' = -\frac{1}{y^2}\left(-y - \mathrm{e}^x y^2\right) = \frac{y}{y^2} + \frac{\mathrm{e}^x y^2}{y^2} = \frac{1}{y} + \mathrm{e}^x = z' + \mathrm{e}^x.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$z' = z + \mathrm{e}^x.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und diese ist mit zur ursprünglichen Differentialgleichung äquivalent.
Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung : Die homogene Differentialgleichung lautet

$$z_{\mathrm{h}}' = z_{\mathrm{h}}.$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int 1 \mathrm{d}x = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_{h} vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}} \mathrm{e}^{\int 1 \mathrm{d}x} = C_{\mathrm{h}} \mathrm{e}^{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung z_{h} der homogenen Differentialgleichung machen wir hier die Ansätze der Variation der Konstanten:

$$z_{\mathrm{p}}(x) = C(x)\mathrm{e}^{x}$$

für eine Funktion C und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung ein. Wir haben für die Ableitung von z_{p} nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_{\mathrm{p}}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{x} + C(x)\mathrm{e}^{x} = C'(x)\mathrm{e}^{x} + z_{\mathrm{p}}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-x} + z_{\mathrm{p}}(x) = z_{\mathrm{p}}'(x) &= z_{\mathrm{p}}(x) + \mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\ C'(x)\mathrm{e}^{x} &= \mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\ C'(x) &= 1. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x C'(s) \mathrm{d}s = \int_0^x 1 \mathrm{d}s \\ &= [s]_0^x = x - 0 = x. \end{aligned}$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung:

$$z_{\mathrm{p}}(x) = C(x)\mathrm{e}^{x} = x\mathrm{e}^{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung: Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung lautet nun

$$z(x) = z_{\mathrm{p}}(x) + z_{\mathrm{h}}(x) = x\mathrm{e}^{x} + C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{x} = (x + C_{\mathrm{h}})\,\mathrm{e}^{x}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zur Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung: Es gilt:

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung (per Rücksubstitution):

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{(x + C_\mathrm{h})\,\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + C_\mathrm{h}}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$.
Lösen des Anfangswertproblems:
Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem: Für die Lösung des Anfangswertproblems muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= \frac{\mathrm{e}^{-0}}{0 + C_\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{e}^0}{C_\mathrm{h}} = \frac{1}{C_\mathrm{h}} \\ \Leftrightarrow\ C_\mathrm{h} &= 1. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung vom Anfangswertproblem:

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + C_\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + x}$$

für alle $x \in \mathbb{R} = (-1, \infty) =: I$. □
(b) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x^{1-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Vorfaktoren bzw. die Inhomogenität sind allesamt Polynome, d.h. diese haben per Definition einen Konvergenzradius von unendlich, und daher wird auch unsere Lösung y einen Konvergenzradius von unendlich haben.
Schritt 2. Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung: Setzen wir den Potenzrei-

henansatz $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
3 = y''(x) - xy'(x) - y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1)\,a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\,a_{n+2} x^n - n a_n x^n - a_n x^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - n a_n - a_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - (n+1)\,a_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left[(n+2)\,a_{n+2} - a_n\right] x^n \\
&= (0+1)\left[(0+2)\,a_{0+2} - a_0\right] x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left[(n+2)\,a_{n+2} - a_n\right] x^n \\
&= 1\cdot(2\cdot a_2 - a_0)\cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left[(n+2)\,a_{n+2} - a_n\right] x^n \\
&= (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left[(n+2)\,a_{n+2} - a_n\right] x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned}
2a_2 - a_0 &= 3 \\
\Leftrightarrow\ 2a_2 &= 3 + a_0 \\
\Leftrightarrow\ a_2 &= \frac{3+a_0}{2}, \\
(n+1)\left[(n+2)\,a_{n+2} - a_n\right] &= 0 \\
\Leftrightarrow\ (n+2)\,a_{n+2} - a_n &= 0 \\
\Leftrightarrow\ (n+2)\,a_{n+2} &= a_n \\
\Leftrightarrow\ a_{n+2} &= \frac{a_n}{n+2}.
\end{aligned}$$

Also haben wir für alle $k \in \mathbb{N}$ induktiv:

$$a_{2k+1} = a_{(2k-1)+2} = \frac{a_{2k-1}}{2k-1+2} = \frac{a_{2k-1}}{2k+1} = \frac{a_1}{\prod\limits_{l=1}^{k}(2l+1)},$$

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k}}{2k+2} = \frac{a_{2k}}{2(k+1)} = \frac{a_2}{\prod\limits_{l=1}^{k}2(l+1)} = \frac{a_2}{2^k\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} = \frac{a_2 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)}$$

und $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, sowie

$$a_2 = \frac{3+a_0}{2}.$$

Schritt 4. Die allgemeine y der Differentialgleichung aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+2} x^{2k+2} \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{\prod\limits_{l=1}^{k}(2l+1)} x^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_2 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+2} \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{k}(2l+1)} x^{2k+1} + a_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+2} \\ &= a_0 + a_1 x + \frac{3+a_0}{2} x^2 + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{k}(2l+1)} x^{2k+1} + \frac{3+a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

Lösen vom Anfangswertproblem:

Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem aufstellen: Die Anfangsdaten ergeben die Werte a_0 und a_1:

$$1 = y(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = a_0 + 0 = a_0,$$

$$0 = y'(0) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot 0^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = a_1 + 0 = a_1$$

Weiter folgt nun aus der obigen Vorschrift:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{3+a_0}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2,\\
a_{2k+1} &= \frac{a_1}{\prod_{l=1}^{k}(2l+1)} = \frac{0}{\prod_{l=1}^{k}(2l+1)} = 0,\\
a_{2k+2} &= \frac{a_2 2^{-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)} = \frac{2\cdot 2^{-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)} = \frac{2^{1-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)}
\end{aligned}
$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend haben wir somit:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_{2k+2} &= \frac{2^{1-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)},\\
a_{2k+1} &= 0
\end{aligned}
$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+2} x^{2k+2}\\
&= a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} x^{2k+2}\\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 0\cdot x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+2}\\
&= 1 + 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+2}\\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{1-k}}{\prod_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+2}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (8 + 4 + 8 = 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y = xe^x.$$

b) Wir betrachten die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^{tB} über die Reihendarstellung der Matrixexponentialfunktion.

c) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right) \forall \lambda \in \mathbb{C}$ ist.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2 = \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\lambda + \sqrt{2}\right)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ laut dritter binomischer Formel. Wir haben als reelle einfache Nullstellen $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ und $\lambda_2 = \sqrt{2}$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung: Aus den reellen einfachen Nullstellen erhalten wir die beiden Fundamentallösungen:

$$\Phi_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} \text{ und } \Phi_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = x\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Setzen wir

$$\sigma := 1,\ \omega := 0 \text{ und } q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x,$$

so ist q ein Polynom vom Grad 1, d.h. $m = 1$, und die Inhomogenität hat die Form

$$x\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \cdot 1 = x\mathrm{e}^{1\cdot x}\cos(0) = x\mathrm{e}^{1\cdot x}\cos(0 \cdot x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma \cdot x}\cos(\omega x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit existieren nach Vorlesung zwei Polynome $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2$ vom Grad 1 so, dass die Lösung der partikulären Gleichung die folgende Form besitzt:

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{p}(x) &= \widetilde{q}_1(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) = \widetilde{q}_1(x)\mathrm{e}^{1\cdot x}\sin(0\cdot x) + \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{1\cdot x}\cos(0\cdot x)\\
&= \widetilde{q}_1(x)\mathrm{e}^{x}\sin(0) + \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{x}\cos(0) = \widetilde{q}_1(x)\mathrm{e}^{x}\cdot 0 + \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{x}\cdot 1\\
&= 0 + \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{x} = \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt es nur das Polynom $\widetilde{q}_2$ zu bestimmen. Da das Polynom $\widetilde{q}_2$ ein Polynom vom Grad 1 ist, existieren Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{q}_2(x) = ax + b \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt für die Ableitungen von y_p nach der Produktregel:

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{p}(x) &= \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{x} = (ax+b)\,\mathrm{e}^{x},\\
y_\mathrm{p}'(x) &= a\mathrm{e}^{x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{x} = a\mathrm{e}^{x} + y_\mathrm{p}(x),\\
y_\mathrm{p}''(x) &= a\mathrm{e}^{x} + a\mathrm{e}^{x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{x} = 2a\mathrm{e}^{x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{x} = (2a+b+ax)\,\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung ergibt dies:

$$\begin{aligned}
&& x\mathrm{e}^{x} &= y_\mathrm{p}''(x) - 2y_\mathrm{p}(x) = (2a+b+ax)\,\mathrm{e}^{x} - 2\,(ax+b)\,\mathrm{e}^{x} = (2a+b+ax-2\,(ax+b))\,\mathrm{e}^{x}\\
&& &= (2a+b+ax-2ax-2b)\,\mathrm{e}^{x} = ((2a-b)-ax)\,\mathrm{e}^{x}\\
&\Leftrightarrow & (2a-b)-ax &= x = 0 + x
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. wir erhalten die folgenden Bedingungen an a und b:

$$\begin{aligned}
-a = 1 &\;\Leftrightarrow\; a = -1,\\
\text{und } 0 = 2a - b = 2\cdot(-1) - b = -2 - b &\;\Leftrightarrow\; b = -2.
\end{aligned}$$

Also lautet das Polynom $\widetilde{q}_2$:

$$\widetilde{q}_2(x) = ax + b = (-1)\cdot x - 2 = -x - 2 = -\,(2+x) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

und die Lösung der partikulären Gleichung und somit gegeben durch

$$y_\mathrm{p}(x) = \widetilde{q}_2(x)\mathrm{e}^{x} = -\,(2+x)\,\mathrm{e}^{x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Schritt 4. Die allgemeine Lösung aufstellen: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich nun durch

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{h}(x) = -\,(2+x)\,\mathrm{e}^{x} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$. □

(b) **Schritt 1. Potenzen der Matrix B bestimmen**: Es gilt:

$$\begin{aligned}
B^0 &= I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B^1 &= B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B^2 &= B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}$$

Also folgt induktiv, dass

$$B^n = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Schritt 2. Matrixexponentialfunktion aufstellen: Wir haben per Definition der Reihe der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tB)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = \frac{t^0}{0!} B^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n \\
&= \frac{1}{1} I_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B = 1 \cdot I_2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) B \\
&= I_2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - \frac{t^0}{0!} \right) B = I_2 + \left(\mathrm{e}^t - \frac{1}{1} \right) B = I_2 + \left(\mathrm{e}^t - 1 \right) B \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\mathrm{e}^t - 1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t - 1 & \mathrm{e}^t - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^t - 1 & \mathrm{e}^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

(c) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Nach dem Hinweis gilt für das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = -(\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Also hat p drei einfache Nullstelle bei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = \mathrm{i}$.
Schritt 2. Eigenräume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker(A - 1\cdot I_3) = \ker\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\},\\
E_{-\mathrm{i}} &= \ker(A - (-\mathrm{i})\cdot I_3) = \ker\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0 & 1\\ 1 & 2+\mathrm{i} & -3\\ 0 & 1 & -1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & 2+\mathrm{i} & -3+\mathrm{i}\\ 0 & 1 & -1+\mathrm{i}\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & 1 & -1+\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\right\},\\
E_{\mathrm{i}} &= \overline{E_{-\mathrm{i}}} = \overline{\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\right\}} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Fundamentallösungen bestimmen: Die erste Fundamentallösung lautet

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Für die zweite und dritte Fundamentallösung formen wir nach der Eulerschen Formel/ Formel von de Moivre um:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix} = (\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t))\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\sin(t) + \mathrm{i}\cos(t)\\ \cos(t) - \sin(t) - \mathrm{i}\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t)\\ \cos(t) - \mathrm{i}\sin(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t) - \sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\cos(t) - \sin(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also lauten die beiden weiteren Fundamentallösungen:

$$\begin{aligned}
\Phi_2(t) &= \begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t) - \sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix},\\
\Phi_3(t) &= \begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\cos(t) - \sin(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Fundamentalmatrix aufstellen: Die zugehörige Fundamentalmatrix Φ besteht nun aus

den drei bestimmten Fundamentallösungen:

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \Phi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \sin(t) & \cos(t) \\ 2e^t & \cos(t) - \sin(t) & -\cos(t) - \sin(t) \\ e^t & \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die drei Fundamentallösungen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 bilden die Fundamentalbasis. □

Aufgabe 3 (14 + 6 = 20 Punkte)

a) Geben Sie alle Funktionen $u\colon [0,1]\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$$u_t = u_{xx}\,, \qquad x\in(0,1), \quad t>0,$$

an, die die Form $u(x,t)=v(x)w(t)$ besitzen und die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0$$

für alle $t>0$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $u_t(x,t)-u_x(x,t)=0$, $t,x\in\mathbb{R}$, die die Bedingung $u(s,s)=s^2$ für alle $s\in\mathbb{R}$ erfüllt. Leiten Sie dabei die Formel der Lösung her.

Hinweis: Eine direkte Verwendung der Formelsammlung liefert nicht die richtige Lösung. Sie sollen die Herleitung der Formel für die Lösung der linearen homogenen Transportgleichung mit Anfangsbedingung $u(x,0)=f(x)$ modifizieren.

Lösung von Aufgabe 3

a) **Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten**: Wir machen den Separationsansatz

$$u(x,t)=v(x)w(t).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t)&=v(x)w'(t),\\ \partial_x u(x,t)&=v'(x)w(t),\\ \partial_{xx} u(x,t)&=v''(x)w(t).\end{aligned}$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen: Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}v(x)w'(t)=\partial_t u(x,t)&=\partial_{xx}u(x,t)=v''(x)w(t)\\ \Leftrightarrow\ \frac{w'(t)}{w(t)}&=\frac{v''(x)}{v(x)}.\end{aligned}$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle t und x gelten muss, müssen die beiden Quotienten

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \text{ und } \frac{v''(x)}{v(x)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda\in\mathbb{C}$, d.h.

$$\frac{w'(t)}{w(t)}=\lambda^2=\frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}w'(t)&=\lambda^2 w(t),\\ v''(x)&=\lambda^2 v(x).\end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu w: Die Lösung zu w lautet nun

$$w(t) = C\mathrm{e}^{\lambda^2 t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten C.
Lösung zu v: Umgestellt bekommen wir

$$v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Als Lösung folgt nun

$$v(x) = C_1\mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda x}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst ($\lambda = 0$)

$$v(x) = C_1 + C_2 x$$

für jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten C_1, C_2.
Schritt 4. Randdaten beachten: Ist nun $\lambda = 0$, so erhalten wir für u:

$$u^{(0)}(x,t) = v^{(0)}(x)w^{(0)}(t) = C^{(0)}\left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)}x\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$, bzw. für $\lambda \neq 0$

$$u^{(\lambda)}(x,t) = v^{(\lambda)}(x)w^{(\lambda)}(t) = C^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C^{(\lambda)} = 1$ für alle möglichen λ. Wir möchten nun, dass die Randbedingung

$$\partial_x u^{(\lambda)}(0,t) = 0 = \partial_x u^{(\lambda)}(1,t)$$

für alle zulässigen λ erfüllt ist, dafür berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x u^{(0)}(x,t) &= C_2^{(0)}, \\
\partial_x u^{(\lambda)}(x,t) &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(-C_1^{(\lambda)}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\lambda\left(-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}\right).
\end{aligned}$$

Damit gilt automatisch

$$0 = \partial_x u^{(0)}(0,t) = C_2^{(0)} = \partial_x u^{(0)}(1,t),$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda^2 t}\lambda\left(-C_1^{(\lambda)}+C_2^{(\lambda)}\right)=\partial_x u^{(\lambda)}(t,0)=0=\partial_x u^{(\lambda)}(t,1)=\mathrm{e}^{\lambda^2 t}\lambda\left(-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda}+C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda}\right)\\
\Leftrightarrow\ -C_1^{(\lambda)}+C_2^{(\lambda)}=0=-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda}+C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda}\\
\Leftrightarrow \begin{cases} C_1^{\lambda}=C_2^{\lambda}\\ 0=-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda}+C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda}\end{cases}\\
\Rightarrow\ 0=-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda}+C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda}=-C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda}+C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda}=C_2^{(\lambda)}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}\right)\\
\Leftrightarrow\ -\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}=0\\
\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda}\\
\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2\lambda}=1\\
\Leftrightarrow\ \lambda=\mathrm{i}k\pi \text{ mit } k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung u_N aufstellen: Sei $N\in\mathbb{N}$, $\lambda_k=\mathrm{i}k\pi$ für $k\in\mathbb{N}$ und $C_j^{(\lambda_k)}=:C_j^{(k)}$ für $k\in\mathbb{N}$ und $j=1,2$. Dann ist die (komplexwertige) Lösung u_N von der Form

$$\begin{aligned}
u_N(x,t)&=u^{(0)}(x,t)+\sum_{k=1}^{N}u^{(k)}(x,t)\\
&=C_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t}\left(C_1^{(k)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x}+C_2^{(k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right)\\
&=C_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t}\left(C_1^{(k)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x}+C_1^{(k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right)\\
&=C_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t}C_1^{(k)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right)
\end{aligned}$$

für alle $t,x\in\mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1^{(0)}\in\mathbb{C}$ und $C_1^{(k)}\in\mathbb{C}$ für $k\in\{1,\dots,N\}$. Damit ist die (reellwertige) Lösung u_N von der Form

$$u_N(x,t)=\widetilde{C}_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{N}\widetilde{C}^{(k)}\mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x)$$

für alle $t,x\in\mathbb{R}$ mit Konstanten $\widetilde{C}_1^{(k)}\in\mathbb{R}$ für $k\in\{0,1,\dots,N\}$.

$\square$

b) Aus der Bedingung, dass

$$u_t=u_{xx} \text{ auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

ist, wissen wir, dass die Funktion

$$r\mapsto u\,(x-r,t+r)$$

konstant ist auf $\mathbb{R}$ für alle $t,x\in\mathbb{R}$. Fixiere nun $t,x\in\mathbb{R}$. Ist nun $r\in\mathbb{R}$ so, dass

$$x-r=:s=t+r,$$

dann gilt per Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x - r &= t + r \\ \Leftrightarrow \; x &= t + 2r \\ \Leftrightarrow \; 2r &= x - t \\ \Leftrightarrow \; r &= \frac{x-t}{2}. \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung

$$u(s,s) = s^2$$

erhalten wir somit für $r = \frac{x-t}{2}$:

$$u\left(x - \frac{x-t}{2}, t + \frac{x-t}{2}\right) = u\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) = \left(\frac{x+t}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + 2xt + t^2}{4}.$$

Wegen der Konstantheit bzgl. r folgt nun:

$$u(x,t) = u\left(x - \frac{x-t}{2}, t + \frac{x-t}{2}\right) = \frac{x^2 + 2xt + t^2}{4}.$$

Da x und t beliebig aus $\mathbb{R}$ waren, erhalten wir:

$$u(x,t) = \frac{x^2 + 2xt + t^2}{4} \text{ für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

$\square$