Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
20.11.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 12 (Übung)

Ein Fußball wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vom Erdboden aus senkrecht in die Höhe geschossen. Bezeichnet $r(t)$ seinen Abstand zum Erdmittelpunkt zur Zeit t, so wird seine Bewegung durch

$$r''(t) = -\frac{\gamma M}{r(t)^2}, \quad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0,$$

beschrieben, wobei γ die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und R der Erdradius ist.

Wie muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gewählt werden, damit der Ball nicht wieder zur Erde zurückfällt? Berechnen Sie für das kleinste derartige v_0 die Lösung r.

Aufgabe 13 (Tutorium)

Geben Sie möglichst viele Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an.

a) $y = xy' + \sqrt{y' - 1}$,

b) $y = xy' + (y')^2 - 2y' + 1$.

Aufgabe 14 (Übung)

Geben Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

a) $x^2 y^{(4)}(x) + 5xy'''(x) + y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) - \frac{2}{x^2} y(x) = 0$.

b) $x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 + \left(\log(x)\right)^2$.

Aufgabe 15 (Tutorium)

a) Geben Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an.

$$x^4 y^{(4)}(x) + 6x^3 y'''(x) - 2xy'(x) + 20y(x) = 0.$$

b) Lösen Sie für $x > 0$ das folgende Anfangswertproblem.

$$y''(x) + \tfrac{1}{x} y'(x) - \tfrac{1}{x^2} y(x) = \tfrac{\log(x)}{x^2}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$$

Aufgabe 16 (Übung)

Wir wollen spezielle Lösungen der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

auf ganz $\mathbb{R}^3$ suchen, die rotationssymmetrisch zur z-Achse sind. Ein Wechsel zu Kugelkoordinaten, also die Verwendung der Funktion $U : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$U(r,\vartheta,\varphi) := u(r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta)),$$

liefert die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) = 0.$$

Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe des Separationsansatzes $U(r,\vartheta,\varphi) = R(r)S(\vartheta)$, wobei R von der Form r^λ für $\lambda \geqslant 0$ und S ein Polynom von $\cos(\vartheta)$ sein soll.

Aufgabe 17 (Tutorium)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + 2xy' - y = (1+x+x^2)e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2},$$

welches mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ gelöst werden kann.

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n an.

b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten explizit gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}, \quad n \geq 1.$$

c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems in geschlossener Form an.