Kurze Zusammenfassung der Vorlesung 6
Am Anfang werden wir einbisschen mehr den Potenzreihenansatz besprechen.
Abgewandelter Potenzreihenansatz In Verallgemeinerung der Eulerschen Differentialgleichung betrachten wir

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

wobei $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen seien (wir betrachten wie vorher auch nur $p_j, q_j \in \mathbb{R}$).

Sei $f(\rho) = (\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0)$ und ρ_1, ρ_2 die Nullstelen von f. Der folgende Satz beschreibt, wie man die Differentialgleichung löst.

Satz: Falls $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, mit $\rho_1 \geq \rho_2$ so gibt es für $0 < |x| < R$ ein Fundamentalsystem von (1) der Gestalt

$$y_1(x) = |x|^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y_2(x) = A \ln |x| y_1(x) + |x|^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k,$$

mit $A \in \{0, 1\}$, wobei

$$\begin{cases} A = 0, c_0 \neq 0, d_0 \neq 0 & \text{, falls } \rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}_0 \\ A = 1, c_0 \neq 0, d_0 = 0 & \text{, falls } \rho_1 = \rho_2 \\ A \in \{0,1\}, c_0 \neq 0, d_0 \neq 0 & \text{, falls } \rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Falls $\rho_1 \notin \mathbb{R}$ ist, so ist $\rho_2 = \overline{\rho_1}$ und es gibt ein Fundamentalsystem von (1) der Gestalt

$$y_1(x) = \mathrm{Re}\,(|x|^{\rho_1} v_1(x)), \quad y_2(x) = \mathrm{Im}\,(|x|^{\rho_1} v_1(x))$$

mit $v_1(x)$ als für $|x| < R$ konvergenter Potenzreihe und $v_1(0) \neq 0$.

Bemerkung: Wenn $\rho_1 - \rho_2 \in N$, dann kann $A = 0$ oder $A = 1$ sein. Man probiert erst den Fall $A = 0$ und wenn man keine Lösung bekommt probiert man dann mit $A = 1$.

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 7
Am Anfang werden wir den abgewandelten Potenzreihenansatz weiter erklren und schnell die Eulersche Gleichungen wiederholen. Im Rest der Vorlesung wird folgendes diskutiert werden.
Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Das Problem Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir schreiben Punkte aus D als $(x, \vec{y})$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und betrachten

$$\vec{y}\,' = F(x, \vec{y}). \tag{1}$$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf Seien D und F wie in oben, sowie $(x_0, \vec{y}_0) \in D$. Sei F bzgl. der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in D stetig partiell differenzierbar. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} \vec{y}\,' &= F(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) &= \vec{y}_0 \end{aligned}\right\} \tag{AWP}$$

eindeutig lösbar, dh

(i) Es gibt eine Lösung $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n$ von (AWP), wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen ist.
(ii) Sind $\vec{y} : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\vec{z} : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von (AWP), so stimmen $\vec{y}$ und $\vec{z}$ auf $I_1 \cap I_2$ überein.

Hauptidee des Beweises

Wir definieren $\vec{y}_0(x) := \vec{y}_0$, sowie iterativ für $k = 0, 1, \ldots$:

$$\vec{y}_{k+1}(x) := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \vec{y}_k(t))\, dt,$$

so konvergiert die Folge $(\vec{y}_k)$ für $k \to \infty$ gegen die eindeutige Lösung $\vec{y}$ von (AWP), für $|x - x_0|$ klein genug.

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 8
Am Anfang werden wir den Beweis des Picard-Lindelöf Satzes diskutieren. Der Beweis ist praktisch und illustriert wie man eine Lösung mit dem Computer approximieren könnte.
Globale Existenz Ist unter den Voraussetzungen von dem Satz von Picard-Lindelöf $D = I \times \mathbb{R}^n$ und gibt es $C \geq 0$ mit

$$\|F(x, \vec{y})\| \leq C(1 + \|\vec{y}\|) \quad \text{für alle } \vec{y} \in \mathbb{R}^n,$$

so existiert die maximale Lösung zu $(x_0, \vec{y}_0)$ auf I.

Lineare Differentialgleichungssysteme Sind der Art

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I, \tag{2}$$

wobei I ein Intervall und $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

Eine Basis $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ des Vektorraums von der Lösungen von

$$\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}, \quad t \in I. \tag{3}$$

heißt <u>Fundamentalsystem</u> für (3) auf I.

Bilden $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ ein Fundamentalsystem von (3), so bezeichnen wir auch

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \ldots & \vec{\phi}_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

als Fundamentalsystem.

Variation der Konstanten: Ist $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem für (3) auf I, und ist $t_0 \in I$ dann ist eine partikuläre Lösung von (2) gegeben durch

$$\vec{y}_p(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)\, d\tau, \quad t \in I.$$

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 9

Am Anfang der Vorlesung werden wir das Beispiel der vorherigen beenden.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten Wir betrachten das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und wollen ein Fundamentalsystem bestimmen.

Grundlegende Beobachtung: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein *Eigenwert* von A und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein zugehöriger *Eigenvektor* (dh gilt $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$), so ist durch

$$\vec{\phi}(t) := e^{\lambda t}\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Lösung von (1) gegeben.

Folgerung: Gibt es eine *Basis* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so ist durch

$$\vec{\phi}_j(t) := e^{\lambda_j t}\vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

ein Fundamentalsystem $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_n$ von (1) gegeben.

Reelle Matrizen mit nicht-reellen Eigenwerten: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komplex diagonalisierbar und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$. Die linear unabhängigen komplexwertigen Lösungen $e^{\lambda t}\vec{v}$ und $e^{\overline{\lambda} t}\overline{\vec{v}}$ im Fundamentalsystem ersetze man durch die linear unabhängigen reellwertigen Lösungen

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right), \quad \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{v}\right).$$

3.3. Fundamentalsysteme für nicht-diagonalisierbare Matrizen Wir betrachten weiter das homogene System

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{H}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nicht diagonalisierbar ist.

Man führe das folgende Verfahren für jeden Eigenwert von A durch:

> Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit m (dh λ_0 ist m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$).
>
> Man bestimme eine Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des *Hauptraumes* von A zum Eigenwert λ_0, dh eine Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I)^m$ (der Hauptraum hat immer Dimension m) wie folgt: Man bestimme eine Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I)$, erweitere diese zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A - \lambda_0 I)^2$ usw. Zweckmäßigerweise bestimmt man dabei in jedem Schritt Vektoren $\vec{w}$ mit
>
> $$(A - \lambda_0 I)\vec{w} = \vec{v},$$

wobei $\vec{v}$ aus dem Spann der bisher gefundenen Vektoren ist (und $\vec{v} = 0$ im ersten Schritt).

Dann sind $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \ldots, \vec{\phi}_m$, gegeben durch

$$\vec{\phi}_j(t) = e^{\lambda_0 t}\Big(\vec{v}_j + t(A-\lambda_0 I)\vec{v}_j + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda_0 I)^2\vec{v}_j + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda_0 I)^{m-1}\vec{v}_j\Big)$$

für $j = 1, 2, \ldots, m$, linear unabhängige Lösungen von (H).

Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, beachte man folgendes:

Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, so ist auch $\overline{\lambda_0}$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit m. In diesem Fall erhält man $2m$ linear unabhängige reellwertige Lösungen von (H) durch

$$\operatorname{Re}\vec{\phi}_1,\ \operatorname{Re}\vec{\phi}_2, \ldots,\ \operatorname{Re}\vec{\phi}_m,\ \operatorname{Im}\vec{\phi}_1,\ \operatorname{Im}\vec{\phi}_2, \ldots,\ \operatorname{Im}\vec{\phi}_m.$$

Der Eigenwert $\overline{\lambda_0}$ wird in dem Verfahren dann nicht mehr berücksichtigt!

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 10

3.5. Die Matrixexponentialfunktion Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definiert man

$$\exp(tA) := e^{tA} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l A^l}{l!}.$$

Die Reihe konvergiert dabei in dem Sinne, dass für jedes (j,k) der Eintrag der Matrix $\sum_{l=0}^{N} \frac{t^l A^l}{l!}$ an der Stelle (j,k) konvergiert.

Eigenschaften: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) Die Matrix e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(2) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$.

(3) Für jedes $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ definiert $\vec{\phi}(t) := e^{tA}\vec{y}_0$ eine Lösung des homogenen Systems (H) mit Anfangswert $\vec{\phi}(0) = \vec{y}_0$. Hieraus erhalten wir:

Ist $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem von (H), so gilt $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist e^{tA} das Fundamentalsystem $\Psi(t)$ von (H) mit $\Psi(0) = I$.

Variation der Konstanten: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t_0 \in I$, $\vec{b} : I \to \mathbb{C}^n$ stetig und $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$, so ist die eindeutige Lösung von

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(t), \quad t \in I,$$

mit $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\,d\tau, \quad t \in I.$$

4. Partielle Differentialgleichungen

Der Unterschied ist, dass sie partielle Ableitungen enthalten. Sie beschreiben in der Regel kompliziertere Phänomene als die gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Ordnung einer partiellen Differentialgleichungist die Ordnung der höchsten aufgetretenen Ableitung. *Lineare* Gleichungen enthalten die gesuchte Funktion u und ihre Ableitungen nur linear, *quasilineare* Gleichungen sind linear in den höchsten Ableitungen von u. Gleichungen, die nicht quasilinear sind heißen *voll nicht-linear*.

Transportgleichungen und Charakteristiken Die Gleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = g(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

für eine Funktion $u = u(x,t)$, mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

hat eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = f(x-at) + \int_0^t g(x-a(t-r),r)\,dr, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Bemerkung: Die Herleitung dieser Formel wird während der Vorlesung beigebracht werden, und sie ist Klausurrelevant.

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 11

4.2. Lineare Transportgleichung im $\mathbb{R}^n$ Sei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differentierbar. Das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u + \vec{a} \cdot \nabla u &=& g(\vec{x},t), \quad (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(\vec{x},0) &=& f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung

$$u(\vec{x},t) = f(\vec{x}-t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x}-\vec{a}(t-r),r)\,dr, \quad (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

4.3. Quasilineare Gleichungen erster Ordnung Allgemeiner als vorher betrachten wir quasilineare Gleichungen der Form

$$\vec{a}(\vec{x},u) \cdot \nabla u = b(\vec{x},u), \quad \vec{x} \in D, \tag{Q}$$

in $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $\vec{a} : D \times J \to \mathbb{R}^n$ und $b : D \times J \to \mathbb{R}$ gegeben sind und J ein reelles Intervall ist.

Jetzt suchen wir unbekannte Charakteristicken $\vec{x} \mapsto u(\vec{x})$ auf Kurven $s \mapsto \vec{k}(s)$ in D und setzen $w(s) := u(\vec{k}(s))$ (s ist hier ein reeller Parameter aus einem Intervall I).

Ableiten von w ergibt nach der Kettenregel:

$$w'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{k}\,'(s) = \vec{k}\,'(s) \cdot \nabla u(\vec{k}(s)).$$

Andererseits ist

$$\vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \cdot \nabla u(\vec{k}(s)) = b(\vec{k}(s), w(s)).$$

Dies legt nahe, zur Lösung von (Q) das folgende *charakteristische System* zu betrachten als Ansatz

$$\begin{aligned} \vec{k}\,'(s) &= \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \\ w'(s) &= b(\vec{k}(s), w(s)). \end{aligned} \tag{CS}$$

Dies ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ($n+1$ Gleichungen für die Funktion $\binom{\vec{k}}{w} : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

Definition: Lösungen $\binom{\vec{k}}{w}$ des charakteristischen Systems (CS) heißen *Charakteristiken* der Gleichung (Q), dabei heißt die Funktion $\vec{k}$ *Grundcharakteristik.*

Wenn man Anfangswertprobleme lösen möchte, muss man x durch ξ ersetzen, und $\vec{k}(0)$, $w(0)$ werden durch die Anfangswerte der entsprechenden Variablen gegeben.

5. Die Potentialgleichung

Die Potentialgleichung oder auch Poisson-Gleichung ist die lineare Gleichung zweiter Ordnung

$$\Delta u = f$$

in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Im homogenen Fall $f = 0$ spricht man auch von der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0.$$

5.1. Harmonische Funktionen Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch in* Ω, falls gilt

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 12

5.4. Grundlösung der Laplace-Gleichung Die für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definierte Funktion

$$\Gamma(\vec{x}) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|\vec{x}\| & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{4\pi} \|\vec{x}\|^{-1} & \text{für } n = 3 \end{cases}$$

heißt *Grundlösung der Laplacegleichung* oder auch *Fundamentallösung.* Häufig schreibt man dann

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \vec{x} \neq \vec{y}.$$

Bemerkung: Physikalisch bedeutet die Grundlösung, dass Potential erzeugt, von einem Punktkörper mit Masse oder Ladung gleich 1. Die Grundlösung ist wichtig, weil die Poisson Gleichung $\Delta u = f$ eine Lösung hat gegeben durch

$$u(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) dy, \tag{1}$$

wobei

$$\Gamma(\vec{x},\vec{y}) = \Gamma(\vec{x}) - \Gamma(\vec{y}).$$

5.2. Mittelwerteigenschaft Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Ein stetiges $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn für jede Kugel

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\} \subseteq \Omega$$

gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|B(\vec{x}_0,r)|} \iiint_{B(\vec{x}_0,r)} u\, d\tau \qquad \text{(Kugelmittel, Volumenintegral)}$$

bzw. genau dann, wenn für jede solche Kugel gilt

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|\partial B(\vec{x}_0,r)|} \iint_{\partial B(\vec{x}_0,r)} u\, do \qquad \text{(sphärisches Mittel, Oberflächenintegral).}$$

Hierbei bezeichnet $|B(\vec{x}_0,r)| = \frac{4\pi}{3} r^3$ das Volumen von $B(\vec{x}_0,r)$ und $|\partial B(\vec{x}_0,r)| = 4\pi r^2$ die Oberfläche der Kugel.

Die entsprechenden Aussagen gelten aber für jedes $n \geq 2$.

5.3. Maximumsprinzip Sei u harmonisch im Gebiet Ω.

1. Gibt es ein $\vec{x}_0 \in \Omega$ mit

$$\begin{array}{rll} & u(\vec{x}_0) \geq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega & (u \text{ hat lokales Maximum in } \vec{x}_0) \\ \text{oder} & u(\vec{x}_0) \leq u(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega & (u \text{ hat lokales Minimum in } \vec{x}_0), \end{array}$$

so ist u auf Ω konstant.

2. Ist Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$, so gilt für jedes $\vec{x} \in \Omega$:

$$\min_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}) \leq u(\vec{x}) \leq \max_{\vec{y} \in \partial\Omega} u(\vec{y}),$$

dh harmonische Funktionen nehmen Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

5.5. Greensche Darstellungsformel Wir nehmen an, dass wir die Poisson Gleichung in einem Gebiet lösen möchten. Wir möchten untersuchen die Möglichkeit, eine Formel, die ein Analog der Formel (1) ist. Der erster Schritt dafür ist die folgende Formel:

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$, und sei u zweimal differenzierbar in einer offenen Menge die Ω enthält. Dann gilt für alle $\vec{x} \in \Omega$

$$u(\vec{x}) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u(\vec{y}) \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) - \Gamma(\vec{x},\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y}) \right) do(\vec{y}) + \iiint\limits_{\Omega} \Gamma(\vec{x},\vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}).$$

Beachte hierbei $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\vec{y}) = \nabla u(\vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y})$ und

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{y}} \Gamma(\vec{x},\vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y}) = \frac{\vec{y} - \vec{x}}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \cdot \vec{N}(\vec{y}).$$

Bemerkung: Die Formel sagt, dass wenn wir Δu auf Ω kennen und u und $\nabla u(\vec{y}) \cdot \vec{N}(\vec{y})$ auf $\partial\Omega$ dann können wir u auf Ω bestimmen.

kurze Zusammenfassung der Vorlesung 13

Letztes Mal haben wir gesehen, wie man das Problem $\Delta V = f$ löst in $\mathbb{R}^n$ für $n = 2$ oder $n = 3$. Die Funktion $V(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}$, wobei $\Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ wie in der letzten Vorlesung definiert ist, ist eine Lösung. In physikalischen Anwendungen doch muss man manchmal die Poisson Gleichung $\Delta V = f$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lösen mit Randbediengung $V|_{\partial\Omega} = \phi$. Ein typischer Fall ist $V|_{\partial\Omega} = 0$. Physikalisch bedeutet das ein geerdeter Körper. Die Lösung ist in diesem Fall

$$V(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}, \tag{2}$$

wobei G die sogenannte Greensche Funktion von Ω ist.

5.6. Greensche Funktionen

Sei Ω ein Gebiet. Eine Funktion $G(\vec{x}, \vec{y})$, welche für $\vec{x}, \vec{y} \in \overline{\Omega}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ definiert ist, heißt Greensche Funktion von Ω, falls G symmetrisch ist (dh $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ gilt) und für jedes $\vec{y} \in \Omega$ gilt:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ für alle } \vec{x} \in \partial\Omega \text{ und } \vec{x} \mapsto h(\vec{x}, \vec{y}) := G(\vec{x}, \vec{y}) - \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \text{ ist harmonisch in } \Omega.$$

Wenn Ω beschränkt ist und G diese Eigenschaften hat, dann gilt (2). Greensche Funktionen kann man aber auch für unbeschränkte Gebiete konstruieren.

Will man die Poissongleichung mit Randwerten (die nicht Null sind) lösen, also etwa

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi, \tag{P_D}$$

dann wird eine Lösung davon durch die folgende Formel gegeben

$$u(\vec{x}) = \iiint\limits_\Omega G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, d\tau(\vec{y}) + \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{N}_y}(\vec{x}, \vec{y}) \varphi(\vec{y})\, do(\vec{y}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega},$$

Die Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (typischer Fall $n = 3$). Wir betrachten Wärmeleitung in Ω und eine Funktion $u = u(\vec{x}, t)$, wobei $t \in [0, T]$ und $\vec{x} \in \Omega$, welche die Temperaturverteilung beschreibt. Wenn Ω homogen ist und es keine Quellen gibt dann ist eine geeignete solche Gleichung

$$\partial_t u(\vec{x}, t) = (\Delta u)(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \Omega, t > 0. \tag{W}$$

Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung ist die Lösung von (W) mit $\Omega = \mathbb{R}^n$ und Anfangsbediengung $u(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x})$. Sie ist die Funktion

$$G(\vec{x}, t) := (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4t}}.$$

G erfüllt (W) und ferner

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x},t)\,d\tau(\vec{x}) = 1, \quad \forall t > 0 \tag{I}$$

und

$$G(\cdot,t) \longrightarrow \delta \quad (t \to 0+)$$

im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(\vec{x},t)\varphi(\vec{x})\,d\tau(\vec{x}) \longrightarrow \varphi(\vec{0}) \quad (t \to 0+) \tag{K}$$

für alle stetigen Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\varphi = 0$ außerhalb einer Kugel $B(\vec{0},R)$.

Kurze Zusammenfassung der Vorlesung 14

6.3. Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem $\mathbb{R}^n$ Wir wollen

$$\begin{aligned} \partial_t u(\vec{x},t) &= (\Delta u)(\vec{x},t) + g(\vec{x},t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(\vec{x},0) &= f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

lösen. Sind f und g beschränkt und Stückweise stetig, dann hat das Anfangswertproblem eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(\vec{x}-\vec{y},t)f(\vec{y})\,d\tau(\vec{x}) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G_n(\vec{x}-\vec{y},t-r)g(\vec{y},r)\,d\tau(\vec{y})\,dr,$$

wobei $G_n(\vec{x},t) := (4\pi t)^{-n/2}\,e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4t}}$.

Bemerkung: Hier hat g die Bedeutung einer Quelle.

6.4. Maximumsprinzip

Erinnerung: $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Satz: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $T \in (0,\infty)$. Es gelte

> $u : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ ist stetig und in Ω_T zweimal stetig partiell differenzierbar nach $x_1,\ldots,x_n$, sowie stetig partiell nach t differenzierbar,

und $\partial_t u - \Delta u = 0$ in Ω_T. Dann nimmt u Maximum und Minimum auf $\partial^*\Omega_T$ an, wobei

$$\partial^*\Omega_T := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).$$

6.5. Separation der Variablen

Mit der Seperation der Variablen kann man verschiedene Gleichungen Lösen wie zum Beispiel die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ auf einem Intervall mit bestimmten Randbediengungen. Der Seperationsansatz ist ein Ansatz der Art $u(x,t) = f(x)g(t)$. Mit Hilfe dieses Ansatzes wird diese Partielle Differentialgleichung in Gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert und kann dann gelöst werden. Die Methode wird mit Beispiel illustriert werden.

Kurze Zusammenfassung der Vorlesung am 04.02.2016

7. Die Wellengleichung

7.1. Die eindimensionale Wellengleichung Wir betrachten

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x), \end{aligned} \tag{W1}$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sind mit $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$. Das Anfangswertproblem (W1) hat die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy. \tag{D1}$$

7.3. Satz für die dreidimensionale Wellengleichung Die eindeutige Lösung für das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt}(\vec{x},t) - \Delta u(\vec{x},t) &= 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(\vec{x},0) &= f(\vec{x}), \\ u_t(\vec{x},0) &= g(\vec{x}), \end{aligned} \tag{W3}$$

mit gegebenen $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ lässt sich darstellen als

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint\limits_{\partial B(\vec{x},|t|)} \Big(t g(\vec{y}) + f(\vec{y}) + \nabla f(\vec{y}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) \Big)\, do(\vec{y}). \tag{D3}$$

In zwei Dimensionen lautet die Lösung

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B(\vec{x},t)} \frac{g(\vec{y})}{\sqrt{t^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}}\, d\tau(\vec{y}) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B(\vec{x},t)} \frac{f(\vec{y})}{\sqrt{t^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}}\, d\tau(\vec{y}) \Big). \tag{D2}$$

Im Rest der Vorlesung werden wir manche Themen wiederholen.