Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS 2017/18
27. Januar 2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (7+3=10 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie mit Hilfe eines (gewöhnlichen) Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems mit $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).
Hinweis: d'Alembert führt nur mit sehr viel Aufwand zum Ziel...

Lösungsvorschlag:

(a) Der (gewöhnliche) Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ und $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2}$ führt eingesetzt in die Differentialgleichung auf

$$\begin{aligned}
0 &= (1+x^2)\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k \\
&= 2a_2 + 2a_0 + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(k(k-1) - 2k + 2)\right] \\
&= 2(a_2 + a_0) + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(k-1)(k-2)\right]
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$a_2 + a_0 = 0 \tag{2}$$
$$a_3 = 0 \tag{3}$$
$$a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(k-1)(k-2) = 0, \quad k \geq 2, \tag{4}$$

welche auf die Rekursionsformel für die Koeffizienten

$$a_{k+2} = -a_k \frac{(k-2)(k-1)}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 2$$

führt. Aus den Anfangswerten erhält man $y(0) = a_0 = -1$ und $y'(0) = a_1 = 0$.

Wegen $a_1 = a_3 = 0$ folgt mit (4)

$$a_{2m+1} = 0 \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Gleichung (2) liefert $a_2 = 1$ und damit wegen (4)

$$a_4 = -a_2 \frac{0 \cdot 1}{4 \cdot 3} = 0, \quad a_6 = 0, \quad \text{allgemein} \quad a_{2m} = 0 \quad \text{für} \quad m \geq 2.$$

Es folgt

$$y(x) = -1 + x^2.$$

(b) Die Differentialgleichung (1) ist 2. Ordnung linear. Somit gibt es zwei linear unabhängige Fundamentallösungen. Die zweite erhält man z.B. aus (a) mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Eingesetzt in die Rekursionsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} a_{2m} &= 0 \quad \text{für alle} \quad m \geq 0 \\ a_{2m+1} &= 0 \quad \text{für alle} \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

und damit $y_2(x) = x$. Sei $y_1(x) = -1 + x^2$, dann sind y_1 und y_2 linear unabhängig und es gilt

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1(x^2 - 1) + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

ist die allgemeine Lösung der DGL.

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(x^2-1)\sin(y)\,y' + 2x\cos(y) = 2x - 2x^3 \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (5) nicht exakt ist und bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ auf einer möglichst großen, einfach zusammenhängenden Menge $D \ni (\sqrt{2}, 0)$ der Form $\mu(x,y) = \psi(x^2-1)$ mit einer Funktion $\psi : (1,\infty) \to \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung (5) in impliziter Form an und bestimmen Sie diejenige Lösung mit $y(\sqrt{2}) = 0$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als

$$(x^2-1)\sin y\, y' + 2x(\cos y - 1 + x^2) = 0$$

beziehungsweise $f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ mit

$$f(x,y) = 2x(\cos y - 1 + x^2), \quad g(x,y) = (x^2-1)\sin y.$$

Da $\partial_x g(x,y) = 2x\sin y \neq -2x\sin y = \partial_y f(x,y)$ ist die DGL nicht exakt.

Gesucht ist ein integrierender Faktor der Form $\mu(x,y) = \psi(x^2-1)$. Dieser muss die Bedingung

$$\partial_x(\mu g) = \partial_y(\mu f)$$

erfüllen.

Im vorliegenden Fall hat man

$$\begin{aligned}
\partial_x(\mu g) &= \partial_x\left(\psi(x^2-1)(x^2-1)\sin y\right) = \psi'(x^2-1)2x(x^2-1)\sin y + \psi(x^2-1)2x\sin y \\
&= 2x\sin y\left((x^2-1)\psi'(x^2-1) + \psi(x^2-1)\right) \\
\partial_y(\mu f) &= \partial_y\left(\psi(x^2-1)2x(\cos y - 1 + x^2)\right) = \psi(x^2-1)(-2x\sin y),
\end{aligned}$$

somit muss ψ der Gleichung

$$2x\sin y\left((x^2-1)\psi'(x^2-1) + \psi(x^2-1)\right) = -2x\sin y\,\psi(x^2-1)$$

genügen. Falls $x\sin y \neq 0$, liefert das die Differentialgleichung

$$(x^2-1)\psi'(x^2-1) + 2\psi(x^2-1) = 0$$

für $\psi(x^2-1)$. Schreibt man $t = x^2-1 > 0$, so ist $t\psi'(t) + 2\psi(t) = 0$ zu lösen. Dies ist eine lineare homogene DGL erster Ordnung für ψ mit der Lösung

$$\psi(t) = \alpha\exp\left(-\int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \alpha e^{-2\ln|t|} = \alpha t^{-2}, \quad t > 0.$$

Setzt man z.B. $\alpha = 1$, so ist

$$\mu(x,y) = \psi(x^2-1) = \frac{1}{(x^2-1)^2}, \quad x > 1, y \in \mathbb{R},$$

ein integrierender Faktor für die DGL $f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.

(b) Die Lösungen der Differentialgleichung sind daher Höhenlinien eines Potentials $H(x,y)$ zum Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \psi(x^2-1)f(x,y) \\ \psi(x^2-1)g(x,y) \end{pmatrix}$. Dieses lässt sich aus $\vec{\nabla} H(x,y) = \vec{v}(x,y)$ bestimmen. Man hat

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,y) &= \psi(x^2-1)f(x,y) = \frac{2x(\cos y - 1 + x^2)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x\cos y}{(x^2-1)^2} + \frac{2x}{x^2-1} \\ \partial_y H(x,y) &= \psi(x^2-1)g(x,y) = \frac{\sin y}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Integration dieser Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \int \partial_y H(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{-\cos y}{x^2-1} + h_1(x) \\ H(x,y) &= \int \partial_x H(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x \cos y + \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad = -\frac{\cos y}{x^2-1} + \ln|x^2-1| + h_2(y) \end{aligned}$$

und damit

$$H(x,y) = -\frac{\cos y}{x^2-1} + \ln|x^2-1|.$$

Lösungen der Differentialgleichung sind also implizit gegeben durch

$$H(x,y) = -\frac{\cos y}{x^2-1} + \ln|x^2-1| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungskurve des zugehörigen Anfangswertproblems mit $y(\sqrt{2}) = 0$ ist die Höhenlinie mit

$$H(\sqrt{2},0) = -\frac{\cos 0}{(\sqrt{2})^2-1} + \ln|(\sqrt{2})^2-1| = -1 = C,$$

also die Höhenlinie $H(x,y) = -\frac{\cos y}{x^2-1} + \ln|x^2-1| = -1$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ e^t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad y(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Bezeichne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Variante 1:

Nach Variation der Konstanten ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-\pi)A}\vec{y}(\pi) + \int_\pi^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Berechnung von e^{tA}:

$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix}$ ist eine Blockmatrix mit

$$A_1 = (2), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt wegen $EN = NE$, und $N^2 = 0$, dass

$$e^{tA_2} = e^{tE+tN} = e^{tE}e^{tN} = e^t(E + tN) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

und somit

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{tA_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_\pi^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s &= e^{tA}\int_\pi^t e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s \\
&= e^{tA}\int_\pi^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & -2se^{-s} \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos s \\ e^s \end{pmatrix}\mathrm{d}s = e^{tA}\int_\pi^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s}\cos s - 2s \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{-\pi} - t^2 + \pi^2 \\ t - \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{-\pi} - t^2 + \pi^2 \\ t - \pi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{t-\pi} + (t-\pi)^2e^t \\ e^t(t - \pi) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei

$$\int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t) - \tfrac{1}{2}e^{-\pi}$$

verwendet wurde. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s &= -e^{-s}\cos s|_\pi^t - \int_\pi^t e^{-s}\sin s\,\mathrm{d}s = -e^{-t}\cos t - e^{-\pi} + e^{-s}\sin s|_\pi^t - \int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s\\ &= -e^{-t}\cos t - e^{-\pi} + e^{-t}\sin t - \int_\pi^t e^{-s}\cos s\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Anfangswertproblems ist daher

$$\vec{y}(t) = e^{(t-\pi)A}\vec{y}(\pi) + \int_\pi^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} e^{2(t-\pi)} \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{t-\pi} + (t-\pi)^2 e^t \\ e^t(t-\pi) \end{pmatrix}.$$

Variante 2:

Die Matrix A besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1,0,0)^T$ sowie den doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = 1$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}_2 = (0,1,0)^T$ und verallgemeinertem Eigenvektor $\vec{v}_3 = (0,2,1)^T$ mit der Eigenschaft

$$(A-E)^2\vec{v}_3 = 0, \quad (A-E)\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 \neq 0.$$

Daraus erhält man

$$e^{-t}e^{tA}\vec{v}_3 = e^{t(A-E)}\vec{v}_3 = \vec{v}_3 + t(A-E)\vec{v}_3 = \vec{v}_3 + 2t\vec{v}_2,$$

weshalb eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ des homogenen Systems gegeben ist durch

$$\Phi(t) = \left[e^{2t}\vec{v}_1, e^t\vec{v}_2, e^t(\vec{v}_3 + 2t\vec{v}_2)\right] = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & (2+2t)e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

mit der Eigenschaft $\Phi(0) = A$. Der Rest folgt wie in Variante 1 mit $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ oder via

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= \Phi(t-\pi)\Phi(0)^{-1}\vec{y}(\pi) + \Phi(t)\int_\pi^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \Phi(t)\Phi(\pi)^{-1}\vec{y}(\pi) + \Phi(t)\int_\pi^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Rand- und Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t) &= 0, && (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty),\\ u(x,0) &= 2, && x \in (0,1),\\ u(1,t) &= \frac{2}{1+t^2}, && t \in (0,\infty). \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle *radialsymmetrischen* Lösungen $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ der partiellen Differentialgleichung

$$x \cdot \nabla u(x) + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} u(x) + \|x\| u(x)^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{6}$$

mit $u(0) = 1$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Die allgemeine Lösung der homogenen Transportgleichung $\partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0$ ist

$$u(x,t) = \psi(x-ct)$$

mit einer beliebigen $\mathscr{C}^1$-Funktion ψ (d.h. die Lösungen sind konstant auf Geraden $x - ct = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Es gilt also hier wegen $c = -1$, dass $u(x,t) = \psi(x+t)$ für $x \in (0,1)$ und $t \in \mathbb{R}_+$. Die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2$ für $x \in (0,1)$ impliziert, dass $\psi(x) = 2$ für $0 < x < 1$, und damit

$$\begin{aligned} u(x,t) = \psi(x+t) = 2 \quad &\text{für} \quad 0 < x+t < 1, \quad 0 < x < 1\\ &\text{bzw.} \quad 0 < t < 1-x, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

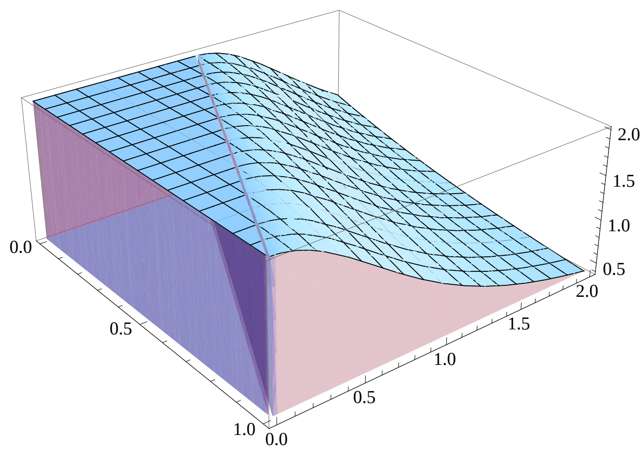

Abbildung 1: Die Lösung des Rand- und Anfangswertproblems aus Aufgabe (a).

Ist $(\xi,\tau) \in (0,1)\times\mathbb{R}_+$ ein Punkt der (x,t)-Ebene mit $\tau \geq 1-\xi$ $(0 < \xi < 1)$, so gilt für u auf der Geraden $x + t = \xi + \tau$, bzw. $x(t) = -t + \xi + \tau$ wegen der Randbedingung

$$u(1, -1+\xi+\tau) = \frac{2}{1+(\xi+\tau-1)^2}$$

und damit

$$u(x,t) = \frac{2}{1+(x+t-1)^2}, \quad t \geq 1-x, \quad 0 < x < 1.$$

(b) Wir suchen radialsymmetrische Lösungen der partiellen Differentialgleichung, d.h. Lösungen der Form

$$u(x) = v(\|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer Funktion $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $v \in \mathscr{C}^1((0,\infty)) \cap \mathscr{C}([0,\infty))$. Aus der Kettenregel folgt

$$\nabla u(x) = v'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|},$$

und damit

$$x \cdot \nabla u(x) = v'(\|x\|)\frac{x \cdot x}{\|x\|^2} = \|x\| v'(\|x\|).$$

Setzt man $r = \|x\|$, so wird die partielle Differentialgleichung (6) zu einer gewöhnlichen DGL

$$r v'(r) + \frac{r}{1+r} v(r) + r g(r)^2 = 0, \quad r > 0,$$

mit Randwert $v(0) = u(0) = 1$. Man sieht, dass $v \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Für $r > 0$ kann man durch r dividieren und erhält eine *Bernoulli-Differentialgleichung* (mit $\alpha = 2$)

$$v'(r) + \frac{1}{1+r} v(r) + g(r)^2 = 0, \quad r > 0. \tag{7}$$

Definiert man also $z(r) = v(r)^{-1}$, $r > 0$, so ist z eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned} z'(r) - \frac{1}{1+r} z(r) - 1 = 0, \quad r > 0, \\ z(0) = v(0)^{-1} = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Der Lösungsraum der homogenen Gleichung $z' - \frac{1}{1+r} z = 0$ wird aufgespannt von der Funktion $z_h(r) = 1 + r$, $r > 0$. Variation der Konstanten $z_p(r) = z_h(r) w(r)$ mit

$$w'(r) = \frac{1}{z_h(r)}$$

liefert eine partikuläre Lösung $z_p(r) = (1+r)\log(1+r)$, $r > 0$, der Differentialgleichung für z. Die allgemeine Lösung ist also

$$z_c(r) = c z_h(r) + z_p(r) = (1+r)\left(c + \log(1+r)\right), \quad r > 0,$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim_{r\to 0} z(r) = c$ und der Randbedingung $z(0) = 1$ ist die eindeutige Lösung des Randwertproblems (8) gegeben durch

$$z_1(r) = (1+r)(1 + \log(1+r)), \quad r \geq 0.$$

Da $z_1(r) > 0$ für alle $r \geq 0$, kann die Substitution $z = g^{-1}$ rückgängig gemacht werden und liefert die Lösung

$$g(r) = \frac{1}{(1+r)(1+\log(1+r))}, \quad r \geq 0.$$

Sämtliche radialsymmetrischen Lösungen des Randwertproblems (6) sind also gegeben durch

$$u(x) = \frac{1}{(1+\|x\|)(1+\log(1+\|x\|))}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

die Lösung ist insbesondere eindeutig.