06.11.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Höhere Mathematik III für Physik

2. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Zum Separationsansatz)

Lösen Sie erst die folgenden Differentialgleichungen allgemein mithilfe eines Separationsansatzes und anschließend das dazugehörende Anfangswertproblem.

(1) $y' = \mathrm{e}^y \sin(x),\ y(0) = 0.$

(2) $y' = \frac{\mathrm{e}^y}{x^2 y},\ x(0) = \frac{1}{3}.$

(3) $y' = \frac{2x\cos(y)}{(1+x^2)\sin(y)},\ y(1) = \frac{\pi}{3}.$

Lösung von Aufgabe 1

(1) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \sin(x) \text{ und } g(y) = \mathrm{e}^y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so können wir die Differentialgleichung (1) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y = \int f(x) \mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{-y}.$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y = -\mathrm{e}^{-y},$$

und

$$\int f(x) \mathrm{d}x + C = \int \sin(x) \mathrm{d}x + C = -\cos(x) + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} -\mathrm{e}^{-y(x)} = \int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y &= \int f(x) \mathrm{d}x + C = -\cos(x) + C \\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-y(x)} &= \cos(x) - C \\ \Leftrightarrow\ -y(x) &= \log(\cos(x) - C) \\ \Leftrightarrow\ y(x) &= -\log(\cos(x) - C). \end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (1)

$$y(x) = -\log(\cos(x) - C)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= -\log(\cos(0) - C) = -\log(1 - C) \\ \Leftrightarrow\ 1 &= \mathrm{e}^0 = 1 - C \\ \Leftrightarrow\ C &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (1) lautet:

$$y(x) = -\log(\cos(x))$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. □
(2) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ und } g(y) = \frac{\mathrm{e}^y}{y}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so können wir die Differentialgleichung (2) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{y}{\mathrm{e}^y} = y\mathrm{e}^{-y}.$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y &= -y\mathrm{e}^{-y} + \int \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\ &= -y\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} = -(y+1)\,\mathrm{e}^{-y} \end{aligned}$$

laut partieller Integration und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + C = -\frac{1}{x} + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$.
Schritt 3. Auflösen nach x: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} -(y+1)\,\mathrm{e}^{-y} = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \int f(x)\mathrm{d}x + C = -\frac{1}{x(y)} + C \\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x(y)} &= (y+1)\,\mathrm{e}^{-y} + C \\ \Leftrightarrow\ x(y) &= \frac{1}{(y+1)\,\mathrm{e}^{-y} + C}. \end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (2)

$$x(y) = \frac{1}{(y+1)\,\mathrm{e}^{-y} + C}.$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = \frac{1}{3}$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = x(0) &= \frac{1}{(0+1)\,\mathrm{e}^{-0} + C}. = \frac{1}{1+C} \\ \Leftrightarrow\ 1 + C &= 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ C = 2,$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (2) lautet:

$$x(y) = \frac{1}{(y+1)\,\mathrm{e}^{-y} + 2}.$$

für alle $y \in (y_0, \infty)$, wobei $y_0 \in \mathbb{R}$ so gewählt ist (eindeutig!), dass

$$(y_0 + 1)\,\mathrm{e}^{-y_0} + 2 = 0$$

ist. Aus dieser Gleichung sehen wir, dass y_0 sicherlich kleiner ist als -1. $\square$

(3) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ und } g(y) = \frac{\cos(y)}{\sin(y)}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, so können wir die Differentialgleichung (3) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.

Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y).$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\mathrm{d}y = -\log\left(|\cos(y)|\right),$$

und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + C = \log\left(\left|1+x^2\right|\right) + C = \log\left(1+x^2\right) + C$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
-\log\left(|\cos(y(x))|\right) = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \int f(x)\mathrm{d}x + C = \log\left(1+x^2\right) + C \\
\Leftrightarrow \ |\cos(y(x))| &= \mathrm{e}^{-\log\left(1+x^2\right) - C} = \frac{\mathrm{e}^{-C}}{1+x^2} \\
\Leftrightarrow \ \pm\cos(y(x)) &= \frac{\mathrm{e}^{-C}}{1+x^2} \\
\Leftrightarrow \ \cos(y(x)) &= \pm\frac{\mathrm{e}^{-C}}{1+x^2} \\
\Leftrightarrow \ y(x) &= \cos^{-1}\left(\pm\frac{\mathrm{e}^{-C}}{1+x^2}\right).
\end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (3)

$$y(x) = \cos^{-1}\left(\pm\frac{\mathrm{e}^{-C}}{1+x^2}\right)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{\pi}{3}$ muss nun gelten:

$$\frac{\pi}{3} = y(1) = \cos^{-1}\left(\pm\frac{\mathrm{e}^{-C}}{1+1^2}\right) = \cos^{-1}\left(\pm\frac{\mathrm{e}^{-C}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-C}\\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{C} &= 1\\ \Leftrightarrow\ C &= \log(1) = 0,\end{aligned}$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (3) lautet:

$$y(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bemerkung zum Merken bestimmter Sinus/ Cosinsus-Werte: Dies geht anhand der folgenden Tabelle ganz gut:

Grad α	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$
Bogenmaß x	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$

Aufgabe 2 (Zum Eulerschen Multiplikator)

Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen nicht-exakt sind und finden Sie dann einen passenden Eulerschen Multiplikator η. Lösen Sie anschließend die Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem. Beachten Sie dabei die jeweiligen Hinweise.

(1) $\left(3xy + y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + xy\right)\mathrm{d}y = 0.$
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von x abhängt.

(2) $\cos(x)\mathrm{d}x + \left(4y\mathrm{e}^{-y} + \sin(x)\right)\mathrm{d}y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}.$
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von y abhängt.

(3) $(x+y)\,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y}\mathrm{d}y = 0,\ y(\mathrm{e}) = 1.$
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von dem Produkt $x \cdot y$ abhängt.

Lösung von Aufgabe 2

Wir stellen zuerst eine Vorüberlegung an. Dazu seien P und Q zwei stetig-differenzierbare Funktionen (abhängig von zwei Variablen x und y). Gegeben sei nun die Differentialgleichung:

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Für unsere Überlegung nehmen wir an, dass diese nicht-exakt ist.
Nun wollen wir einen Eulerschen Multiplikator η finden so, dass

$$\eta(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x + \eta(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

exakt ist, in dem wir uns eine gewisse Struktur φ vorgeben, genauer:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right).$$

Die Funktion φ kann dabei alles sein, nur x, y oder die Summe $x+y$, etc., der Multiplikator η hängt in dem Fall dann nur von x z.B. ab.
Wir setzen:

$$\widetilde{P}(x,y) = \eta(x,y)P(x,y) \text{ und } \widetilde{Q}(x,y) = \eta(x,y)Q(x,y).$$

Da nun die Differentialgleichung

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

exakt ist, muss gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{P}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{Q}(x,y).$$

Wir erhalten für die Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{P}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\eta\left(\varphi(x,y)\right)P(x,y)\right]$$

$$= \eta'\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) + \eta\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y),$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{Q}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\eta\left(\varphi(x,y)\right)Q(x,y)\right]\\ &= \eta'\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y) + \eta\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y).\end{aligned}$$

Damit durch Umstellung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{P}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{Q}(x,y)\\ \Leftrightarrow\ \eta'\left(\varphi(x,y)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)\right] &= \eta\left(\varphi(x,y)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)\right]\\ \Leftrightarrow\ \eta'\left(\varphi(x,y)\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)}\eta\left(\varphi(x,y)\right).\end{aligned}$$

Wünschenswert wäre, dass es eine Funktion h gibt mit

$$h\left(\varphi(x,y)\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)},$$

d.h. der Term

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)}$$

hängt nur von φ ab also z.B. nur von x oder $x+y$, denn dann haben wir

$$\eta'\left(\varphi(x,y)\right) = h\left(\varphi(x,y)\right)\eta\left(\varphi(x,y)\right).$$

Zum Lösen nach η also ($z = \varphi(x,y)$)

$$\eta'(z) = h(z)\eta(z)$$

mit Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\eta(z) = C\mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

O.B.d.A. wählen wir $C = 1$, da wir nur an einem $\eta \neq 0$ interessiert sind. Damit haben wir

$$\eta\left(\varphi(x,y)\right) = \mathrm{e}^{\int^{\varphi(x,y)} h(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

(1) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 3xy + y^2 \text{ und } Q(x,y) = x^2 + xy$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= 3x + 2y,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= 2x + y\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}3x + 2y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = 2x + y\\ \Leftrightarrow\ x &= -y\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = -y\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (1) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(x)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = x$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = 1 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)} &= \frac{(2x+y)-(3x+2y)}{0\cdot(3xy+y^2) - 1\cdot(x^2+xy)} \\
&= \frac{-(x+y)}{-x(x+y)} \\
&= \frac{1}{x} = h(x) = h\left(\varphi(x,y)\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{\tau}\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\log(|z|)} = |z|$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right) = |\varphi(x,y)| = |x| \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{R}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf der linken und der rechten Halbebene

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (1')$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x,y) &= \eta(x)P(x,y) \\
&= |x|\left(3xy+y^2\right) \\
&= 3x|x|y + |x|y^2, \\
\widetilde{Q}(x,y) &= \eta(x)Q(x,y) \\
&= |x|\left(x^2+xy\right) \\
&= |x|x^2 + x|x|y = |x|^3 + x|x|y
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla\widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix}\widetilde{P}(x,y)\\ \widetilde{Q}(x,y)\end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int \widetilde{P}(z,y)\mathrm{d}z = \int \left(3z|z|y + |z|y^2\right)\mathrm{d}z \\
&= \operatorname{sign}(x)x^3y + \frac{\operatorname{sign}(x)}{2}x^2y^2 + C(y) \\
&= |x|^3y + \frac{x|x|}{2}y^2 + C(y)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}
|x|x^2 + x|x|y = \widetilde{Q}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x,y) \\
&= |x|^3 + x|x|y + C'(y) \\
\Leftrightarrow\ C'(y) &= 0
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. C ist konstant. O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = |x|^3y + \frac{x|x|}{2}y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1'): Nun finden wir für alle Paare $(x_0,y_0) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$ mit $\widetilde{Q}\,(x_0,y_0) \neq 0$ ein offenes Intervall $I_x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$mit $x_0 \in I_x$ so, dass wir eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ finden mit

$$|x|^3 y(x) + \frac{x|x|}{2} y(x)^2 = \widetilde{F}(x,y(x)) = \widetilde{F}\,(x_0,y_0) \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (1') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (1).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können über die Mitternachtsformel/ p-q-Formel die Gleichung

$$|x|^3 y(x) + \frac{x|x|}{2} y(x)^2 = \widetilde{F}\,(x_0,y_0)$$

nach $y(x)$ auflösen, dadurch ergibt sich

$$y(x) = \frac{-|x|^3 \pm \sqrt{|x|^6 - 2x|x|\widetilde{F}\,(x_0,y_0)}}{x|x|}$$

als Lösung für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit

$$|x|^6 - 2x|x|\widetilde{F}\,(x_0,y_0) \geq 0.$$

□

(2) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = \cos(x) \text{ und } Q(x,y) = 4\mathrm{e}^{-y} + \sin(x)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) &= \cos(x) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = \cos(x) \\ \Leftrightarrow\ x &= \frac{(2k+1)}{2}\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x = \frac{(2k+1)}{2}\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega\backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (2) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(y)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = y$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = 0 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = 1.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)} &= \frac{\cos(x) - 0}{1 \cdot \cos(x) - 0 \cdot (4y\mathrm{e}^{-y} + \sin(x))} \\ &= \frac{\cos(x)}{\cos(x)} \\ &= 1 = h(y) = h\left(\varphi(x,y)\right) \end{aligned}$$

für alle $x,y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\int 1 \mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^z$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right) = \mathrm{e}^y \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf ganz $\mathbb{R}^2$

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (2')$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x,y) &= \eta(x)P(x,y)\\ &= \mathrm{e}^y\cos(x)\\ \widetilde{Q}(x,y) &= \eta(x)Q(x,y)\\ &= \mathrm{e}^y\left(4y\mathrm{e}^{-y} + \sin(x)\right)\\ &= 4y + \mathrm{e}^y\sin(x)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla\widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix}\widetilde{P}(x,y)\\ \widetilde{Q}(x,y)\end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int \widetilde{P}(z,y)\mathrm{d}z = \int \mathrm{e}^y\cos(z)\mathrm{d}z\\ &= \mathrm{e}^y\sin(x) + C(y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}4y + \mathrm{e}^y\sin(x) = \widetilde{Q}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x,y)\\ &= \mathrm{e}^y\sin(x) + C'(y) \Leftrightarrow\ C'(y) = 4y\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. für die Funktion C folgt nun:

$$C(y) = \int 4z\mathrm{d}z = 2y^2 + C$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wähle wir $C = 0$, d.h.

$$C(y) = 2y^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = \mathrm{e}^y\sin(x) + 2y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (2'): Wegen

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}\left(x_0, y_0\right) &= \widetilde{Q}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\\ &= 4\cdot\frac{\pi}{2} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\sin(0) = 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

finden wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 = x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathrm{e}^{y(x)}\sin(x) + 2y(x)^2 = \widetilde{F}(x, y(x)) = \widetilde{F}\left(x_0, y_0\right) = \widetilde{F}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\sin(0) + 2\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (2') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (2).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$\mathrm{e}^{y(x)}\sin(x) + 2y(x)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

nicht explizit nach $y(x)$ auflösen, sondern nur implizit lösen. $\square$

(3) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = x + y \text{ und } Q(x,y) = -\frac{x^2}{y}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = \mathrm{e}$, $y_0 = 1$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= 1,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= -\frac{2x}{y}\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = -\frac{2x}{y}\\ \Leftrightarrow\ x &= -\frac{y}{2}\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = -\frac{y}{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (3) ist nicht exakt.

Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(xy)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = xy$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = y \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = x.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)} &= \frac{-\frac{2x}{y} - 1}{x\cdot(x+y) - y\cdot\left(-\frac{x^2}{y}\right)}\\ &= \frac{-\frac{2x}{y} - 1}{x^2 + xy + x^2}\\ &= \frac{-(2x+y)}{xy\,(2x+y)}\\ &= -\frac{1}{xy} = h(xy) = h\left(\varphi(x,y)\right)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\int -\frac{1}{\tau}\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-\log(|z|)} = \frac{1}{|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right) = \frac{1}{|xy|} \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf jedem Quadranten

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (3')$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x,y) &= \eta(x)P(x,y)\\ &= \frac{x+y}{xy}\\ \widetilde{Q}(x,y) &= \eta(x)Q(x,y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{x^2}{xy^2}\\
&= -\frac{x}{y^2}
\end{aligned}
$$

für alle $(x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktionen $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ so, dass

$$
\nabla\widetilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x, y) \\ \widetilde{Q}(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}
$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= \int \widetilde{P}(z, y)\mathrm{d}z = \int \frac{z + y}{zy}\mathrm{d}z = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z\\
&= \frac{x}{y} + \log\left(|x|\right) + C(y)
\end{aligned}
$$

für alle $(x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$
\begin{aligned}
-\frac{x}{y^2} &= \widetilde{Q}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x, y)\\
&= -\frac{x}{y^2} + C'(y) \Leftrightarrow\ C'(y) = 0
\end{aligned}
$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. für die Funktion C ist konstant. O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$
\widetilde{F}(x, y) = \frac{x}{y} + \log\left(|x|\right)
$$

für alle $(x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (3'): Wegen

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q}\left(x_0, y_0\right) &= \widetilde{Q}\left(\mathrm{e}, 1\right)\\
&= -\frac{\mathrm{e}}{1^2} = -\mathrm{e} \neq 0
\end{aligned}
$$

finden wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\mathrm{e} = x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt mit

$$
\frac{x}{y(x)} + \log\left(|x|\right) = \widetilde{F}(x, y(x)) = \widetilde{F}\left(x_0, y_0\right) = \widetilde{F}\left(\mathrm{e}, 1\right) = \frac{\mathrm{e}}{1} + \log\left(|\mathrm{e}|\right)\ = \mathrm{e} + 1 \text{ für alle } x \in I_x.
$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (3') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (3).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$
\frac{x}{y(x)} + \log\left(|x|\right) = \mathrm{e} + 1
$$

durch Umstellung explizit nach $y(x)$ auflösen, dies ergibt dann

$$
y(x) = \frac{x}{\mathrm{e} + 1 - \log\left(|x|\right)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}, 0, \mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\},
$$

und $y(0) = 0$. □

Aufgabe 3 (Zum Reduktionsverfahren von d'Alembert)

Zeigen Sie, dass die jeweilige Funktion y_1 stets eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist. Bestimmen Sie erst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und danach die spezielle zum dazugehörigen Anfangswertproblem. Machen Sie dafür den Ansatz $y_2(x) := y_1(x)v(x)$.

(1) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0,\ y(4) = 1 = y'(4)$.
Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ist eine Lösung von (1).

(2) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = x\mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$, ist eine Lösung von (2).

Lösung von Aufgabe 3

(1) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (1): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ y_1''(x) &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} 2x^2 y_1''(x) + 3xy_1'(x) - y_1(x) &= 2x^2 \cdot \frac{2}{x^3} - \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (1).
Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{x}v(x), \\ y_2'(x) &= -\frac{1}{x^2}v(x) + \frac{1}{x}v'(x), \\ y_2''(x) &= \frac{2}{x^3}v(x) - \frac{1}{x^2}v'(x) - \frac{1}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x) \\ &= \frac{2}{x^3}v(x) - \frac{2}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x). \end{aligned}$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (1), daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 y_2''(x) + 3xy_2'(x) - y_2(x) \\ &= 2x^2\left[\frac{2}{x^3}v(x) - \frac{2}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x)\right] + 3x\left[-\frac{1}{x^2}v(x) + \frac{1}{x}v'(x)\right] - \frac{1}{x}v(x) \\ &= v(x)\left[\frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x}\right] + v'(x)\left[-4+3\right] + 2xv''(x) \\ &= 2xv''(x) - v'(x) \\ \Leftrightarrow\ \ v''(x) &= \frac{1}{2x}v'(x). \end{aligned}$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = v''(x) = \frac{1}{2x}u'(x) = \frac{1}{2x}u(x).\ (1')$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung (1'): Die Lösung lautet:

$$u(x) = C\mathrm{e}^{\int \frac{1}{2z}\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log(|x|)} = C\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2: Es gilt:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int v'(z)\mathrm{d}z = \int u(z)\mathrm{d}z = \int C\sqrt{|z|}\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{3}C\,\mathrm{sign}(x)|x|^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}C\,\mathrm{sign}(x)|x|^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}C|x|^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}C\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = \frac{3}{2}$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = \sqrt{|x|} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (1): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) erhalten wir also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 \sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Aufstellen der speziellen Lösung y zum Anfangswertproblem (1): Es gilt für die Ableitung von y:

$$y'(x) = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2 \operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen den Anfangswertbedingungen $y(4) = y'(4) = 1$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 1 = y(4) &= \frac{C_1}{4} + C_2\sqrt{4} = \frac{C_1}{4} + 2C_2 \\ \Leftrightarrow\ 4 &= C_1 + 8C_2 \\ 1 = y'(4) &= -\frac{C_1}{4^2} + \frac{C_2 \operatorname{sign}(4)}{2\sqrt{4}} = -\frac{C_1}{16} + \frac{C_2}{4} \\ \Leftrightarrow\ 16 &= -C_1 + 4C_2. \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich durch Addieren der beiden Gleichungen:

$$20 = 0C_1 + 12C_2 = 12C_2 \ \Leftrightarrow\ C_2 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.$$

Und damit muss für die Konstante C_1 gelten:

$$\begin{aligned} 4 = C_1 + 8C_2 &= C_1 + \frac{40}{3} \\ \Leftrightarrow\ C_1 &= \frac{12-40}{3} = -\frac{28}{3}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich als Lösung für unser Anfangswertproblem (1):

$$y(x) = -\frac{28}{3x} + \frac{5}{3}\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

(2) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (2): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x, \\ y_1''(x) &= \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (2+x)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(2+x)\,\mathrm{e}^x - 2(1+x)\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = 0,$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (2).
Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\mathrm{e}^x v(x), \\ y_2'(x) &= (1+x)\mathrm{e}^x v(x) + x\mathrm{e}^x v'(x), \\ y_2''(x) &= (2+x)\mathrm{e}^x v(x) + (1+x)\mathrm{e}^x v'(x) + (1+x)\mathrm{e}^x v'(x) + x\mathrm{e}^x v''(x) \\ &= (2+x)\mathrm{e}^x v(x) + 2(1+x)\mathrm{e}^x v'(x) + x\mathrm{e}^x v''(x). \end{aligned}$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (2), daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= y_2''(x) - 2y_2'(x) + y_2(x) \\ &= [(2+x)\mathrm{e}^x v(x) + 2(1+x)\mathrm{e}^x v'(x) + x\mathrm{e}^x v''(x)] - 2\,[(1+x)\mathrm{e}^x v(x) + x\mathrm{e}^x v'(x)] + x\mathrm{e}^x v(x) \\ &= v(x)\,[(2+x)\mathrm{e}^x - 2(1+x)\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x] + v'(x)\,[2(1+x)\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x] + x\mathrm{e}^x v''(x) \\ &= x\mathrm{e}^x v''(x) + 2\mathrm{e}^x v'(x) \\ &= \mathrm{e}^x\,[xv''(x) + 2v'(x)] \\ \Leftrightarrow\ v''(x) &= -\frac{2}{x}v'(x) \end{aligned}$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = v''(x) = -\frac{2}{x}v'(x) = -\frac{2}{x}u(x).\ (2')$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung (2'): Die Lösung lautet:

$$u(x) = C\mathrm{e}^{\int -\frac{2}{z}\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{-2\log(|x|)} = \frac{C}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2: Es gilt:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int v'(z)\mathrm{d}z = \int u(z)\mathrm{d}z = \int \frac{C}{z^2}\mathrm{d}z \\ &= -\frac{C}{x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = x\mathrm{e}^x \cdot \left(-\frac{C}{x}\right) = -C\mathrm{e}^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = -1$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = \mathrm{e}^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (2): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) erhalten wir also

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1x\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^x = (C_1x + C_2)\,\mathrm{e}^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Aufstellen der speziellen Lösung y zum Anfangswertproblem (2): Es gilt für die Ableitung von y:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1\mathrm{e}^x + C_1x\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x\,(C_1 + C_2) + C_1x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen den Anfangswertbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= C_1 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^0 + C_2\mathrm{e}^0 = C_2 \\ 2 = y'(0) &= \mathrm{e}^0\,(C_1 + C_2) + C_1 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^0 \\ &= C_1 + C_2 = C_1 + 1 \\ \Leftrightarrow\ \ C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Also ergibt sich als Lösung für unser Anfangswertproblem (2):

$$y(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (1 + x)\,\mathrm{e}^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □
Bemerkung: Wir werden auch relativ bald sehen wie wir solche Differentialgleichungen wie in (2) von Hand selber lösen können, siehe Differentialgleichungen $n$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.