06.12.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

4. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Wiederholung:
Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ gegeben.
Definitionen (Lokal/ Global Lipschitz-Stetig in der zweiten Komponente): Wir nennen die Funktion f

- global Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente auf U genau dann, wenn eine (Lipschitz-)Konstante $L \geq 0$ existiert mit
$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \text{ für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in U.$$
- lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente auf U genau dann, wenn es zu jedem Punkt $(x_*, y_*) \in U$ eine offene Umgebung $\widetilde{U} \subseteq U$ mit $(x_*, y_*) \in \widetilde{U}$ gibt so, dass es eine Lipschitz-Konstante $L\left(\widetilde{U}\right) =: L \geq 0$ gibt mit
$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \text{ für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in \widetilde{U}.$$

Satz von Picard-Lindelöf (Lokale Version): Sei f stetig und lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, dann existiert für alle $(x_0, y_0) \in U$ eine lokal eindeutige Lösung $y\colon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ zu dem Anfangswertproblem
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$
Für das maximale Intervall muss
$$\varepsilon = \min\left\{a, \frac{b}{\sup\limits_{(x,y)\in Z} |f(x, y)|}\right\}$$
gelten, wobei $a, b > 0$ sind für den abgeschlossenen Zylinder
$$Z = [x_0 - a, x_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \subseteq U.$$
Wir bezeichnen mit
$$B_r(x) = \{z \in \mathbb{R}^n\colon \ \|x - z\| < r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
den offenen Ball mit Radius $r > 0$ um den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.
Satz von Picard-Lindelöf (Globale Version): Sei $f\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und global Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente. Dann existiert für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ zum Anfangswertproblem
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Picard-Iteration: Setze $y_0(x) \equiv y_0$ und für $n \in \mathbb{N}_0$:
$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$

Banachscher Fixpunktsatz: Seien (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum, $M \subseteq X$ abgeschlossen mit $M \neq \emptyset$, sowie $\varphi\colon M \to M$ eine kontraktive Selbstabbildung d.h. $\varphi(M) \subseteq M$ und φ ist eine Kontraktion auf M (Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \in [0, 1)$). Dann existiert genau ein $\widetilde{x} \in M$ so, dass $\widetilde{x}$ ein Fixpunkt von φ auf der Menge M ist, d.h.
$$\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \text{ (Fixpunkt)}$$
ist.
Fixpunkt-Iteration: Sei $x_0 \in M$ beliebig und setze für $n \in \mathbb{N}_0$:
$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Dann konvergiert diese Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen den Fixpunkt $\widetilde{x}$:

$$\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\widetilde{x}).$$

Aufgabe 1 (Approximation Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

Seien $a > 0$ fest, $M := [0,a]\times\mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Weiter seien f stetig auf M und gleichmäßig Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Komponente. Wir setzen die Funktionenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $[0,a]$ durch

$$x_0(t) \equiv x_0,\ x_{n+1} := x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau, x_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie nun, dass die Funktionenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig auf $[0,a]$ konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass die Grenzfunktion $x(t) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ zweimal differenzierbar ist mit

$$x''(t) = f(t, x(t)) \text{ auf } [0,a]$$

und Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = x_1$.

Lösung von Aufgabe 1

Es gilt für alle $\tau \in [0,a]$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(\tau, x_n(\tau)) \in [0,a]\times\mathbb{R},$$

d.h. die rekurssive Vorschrift ist wohl-definiert. Es gilt für alle $t \in [0,a]$ laut Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_0(t)| &= \left|x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_0(\tau))\,\mathrm{d}\tau - x_0\right| \\
&\le t\,|x_1| + \int_0^t (t-\tau)\,|f(\tau, x_0)|\,\mathrm{d}\tau \\
&\le t\,|x_1| + \int_0^t (t-\tau)\mathrm{d}\tau \sup_{s\in[0,a]} |f(s, x_0)| \\
&= t\,|x_1(t)| + \left(t^2 - \frac{1}{2}t^2\right) K \\
&= t\,|x_1(t)| + \frac{1}{2}t^2 K
\end{aligned}$$

mit

$$K := \sup_{s\in[0,a]} |f(s, x_0)| \in [0,\infty).$$

Allgemein gilt:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = L^n \left(|x_1(t)|\,\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}K\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ t \in [0,a].$$

Dies zeigen wir per vollständige Induktion.
Induktionsanfang $n = 0$: Wir haben so schon oben gezeigt für alle $t \in [0,a]$:

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le t\,|x_1(t)| + \frac{1}{2}t^2 K = L^0 \left(|x_1(t)|\,\frac{t^{0+1}}{(0+1)!} + \frac{t^{0+2}}{(0+2)!}K\right).$$

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses n gelte:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = L^n \left(|x_1(t)|\,\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}K\right) \text{ für alle } t \in [0,a].$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Es gilt für alle $t \in [0,a]$ laut Dreiecks-Ungleichung, Lipschitz-Stetigkeit von $f(t,\cdot)$ und der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
\left|x_{(n+1)+1}(t) - x_{n+1}(t)\right| &= \left|x_0 + tx_1(t) + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau, x_{n+1}(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \left(x_0 + tx_1(t) + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau, x_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right)\right| \\
&\le \int_0^t (t-\tau)\,|f(\tau, x_{n+1}(\tau)) - f(\tau, x_n(\tau))|\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq L\int_0^t (t-\tau)\left|x_{n+1}(\tau)-x_n(\tau)\right| \mathrm{d}\tau\\
&\leq LL^n\int_0^t (t-\tau)\left(|x_1|\frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{\tau^{2n+2}}{(2n+2)!}K\right)\mathrm{d}\tau\\
&= L^{n+1}\int_0^t \left(|x_1|\frac{t\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{t\tau^{2n+2}}{(2n+2)!}K-|x_1|\frac{\tau^{2n+2}}{(2n+1)!}-\frac{\tau^{2n+3}}{(2n+2)!}K\right)\mathrm{d}\tau\\
&= L^{n+1}\left(|x_1|\frac{t^{2n+3}}{(2n+2)(2n+1)!}+\frac{t^{2n+4}}{(2n+3)(2n+2)!}K-|x_1|\frac{t^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)!}-\frac{t^{2n+4}}{(2n+4)(2n+2)!}K\right)\\
&= L^{n+1}\left(|x_1(t)|\frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!}+\frac{t^{2n+4}}{(2n+4)!}K\right)\\
&= L^{n+1}\left(|x_1(t)|\frac{t^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}+\frac{t^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!}K\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist die Abschätzung bewiesen. Wir erhalten per Teleskopsumme und Dreiecks-Ungleichung damit für alle $t \in [0,a]$:

$$
\begin{aligned}
|x_{n+l}(t)-x_n(t)| &= \left|\sum_{j=n}^{n+l-1}(x_{j+1}(t)-x_j(t))\right|\\
&\leq \sum_{j=n}^{n+l-1}|x_{j+1}(t)-x_j(t)|\\
&\leq \sum_{j=n}^{n+l-1}L^j\left(|x_1|\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}+\frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}K\right)\\
&\leq \sum_{j=n}^{n+l-1}L^j\left(|x_1|\frac{a^{2j+1}}{(2j+1)!}+\frac{a^{2j+2}}{(2j+2)!}K\right)\\
&\to 0
\end{aligned}
$$

für $n,l\to\infty$ laut dem Cauchy-Kriterium für Reihen, d.h. aber, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,a]$ konvergiert. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert sie insbesondere punktweise, d.h. wir setzen zu $t\in[0,a]$:

$$x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

Dadurch erhalten wir die Fixpunktgleichung

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t)\\
&= x_0 + tx_1 + \lim_{n\to\infty}\int_0^t (t-\tau)\, f(\tau, x_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau\\
&= x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau)\lim_{n\to\infty} f(\tau, x_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau\\
&= x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Da die rechte Seite stetig-differenzierbar ist, ist automatisch $x\in C^1[0,a]$ mit Ableitung

$$x'(t) = x_1 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau \text{ für } t\in[0,a].$$

Erneut ist die rechte Seite stetig-differenzierbar, also auch x'' und damit $x\in C^2[0,a]$ mit zweiter Ableitung:

$$x''(t) = f(t, x(t)) \text{ für } t\in[0,a].$$

Weiter gilt:

$$x(0) = x_0 \text{ und } x'(0) = x_1.$$

□

Aufgabe 2 (Anwendung vom Satz von Picard-Lindelöf)

Gegeben sei die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,y')\mapsto x^2-2xy'+\frac{3}{2}y'^2-y$$

und ein Punkt $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x_0, y_0, y_0') = 0 \text{ und } y_0' \neq \frac{2}{3}x_0.$$

Zeigen Sie, dass das so gegebene implizite Anfangswertproblem

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

lokal eindeutig lösbar ist.

Lösung von Aufgabe 2

Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = F(x, y, y') &= x^2 - 2xy' + \frac{3}{2}y'^2 - y \\ \Leftrightarrow \ y' &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 6(x^2 - y)}}{3} = \frac{2}{3}x \pm \frac{1}{3}\sqrt{6y - 2x^2} = \frac{2}{3}x \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{y - \frac{x^2}{3}} = \frac{2}{3}x \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y - \frac{x^2}{3}}. \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir $y_0' > \frac{2}{3}x_0$, d.h. wir beschäftigen uns mit dem Fall

$$y'(x) = \frac{2}{3}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y(x) - \frac{x^2}{3}}.$$

Laut der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf hat das Anfangswertproblem

$$(*) \begin{cases} y'(x) = \frac{2}{3}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y(x) - \frac{x^2}{3}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ auf der Menge

$$\mathcal{D} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > \frac{x^2}{3}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist mit $x_0 \in I$. Wähle I als das maximale Intervall.
Behauptung: Die Funktion y löst das implizite Anfangswertproblem

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

auf der Menge

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = 0,\ z \neq \frac{2}{3}x,\ x \in I\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

eindeutig und maximal.
Annahme: Sei $\widetilde{y}\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung mit $y = \widetilde{y}$ auf $\widetilde{I}$ und $\widetilde{I}$ maximal. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} a &:= \inf\left\{x \in \widetilde{I} \colon \widetilde{y}'(t) > \frac{2}{3} \text{ für alle } t \in (x, x_0)\right\}, \\ b &:= \sup\left\{x \in \widetilde{I} \colon \widetilde{y}'(t) > \frac{2}{3} \text{ für alle } t \in (x_0, x)\right\}, \\ J &:= (a, b). \end{aligned}$$

Da die Funktion $\widetilde{y}'$ stetig ist auf $\widetilde{I}$ folgt $J \neq \emptyset$ und $\widetilde{y}|_J$ löst das Anfangswertproblem $(*)$.
Es ist zu zeigen, dass $J \overset{!}{=} \widetilde{I}$ ist. Wäre $b < \sup \widetilde{I}$, dann würden wir aus

$$\lim_{x \to b^-} \widetilde{y}'(x) = \lim_{x \to b^-} \widetilde{y}'(x) > \frac{2}{3}b$$

einen Widerspruch zur Definition von b bzw. dem Supremum erhalten. Also ist $b = \sup \widetilde{I}$. Wäre $a > \inf \widetilde{I}$, dann würden wir aus

$$\lim_{x \to a^+} \widetilde{y}'(x) = \lim_{x \to a^+} \widetilde{y}'(x) > \frac{2}{3}b$$

einen Widerspruch zur Definition von a bzw. dem Infimum erhalten. Also ist $a = \inf \widetilde{I}$. Ebenso $a, b \notin \widetilde{I}$. Sind nun $a, b \notin \widetilde{I}$, dann folgt

$$y'(x) > \frac{2}{3}x \text{ für alle} x \in \widetilde{I}$$

und $\widetilde{y}$ löst das Anfangswertproblem $(*)$. Wegen der Eindeutigkeit und der Maximalität der Intervalle muss nun $\widetilde{I} = I$ folgen. □

Aufgabe 3 (Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes)

Gegeben Sei der Operator $T\colon C^0[0,1] \to C^0[0,1]$ durch

$$(Tf)(x) := 1 + x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\ x \in [0,1],\ f \in C^0[0,1].$$

Zeigen Sie, dass der Operator T genau einen Fixpunkt $f^* \in C^0[0,1]$ hat. Welches Anfangswertproblem löst dann dieser Fixpunkt f^*?

Lösung von Aufgabe 3

Bekannt ist, dass der Raum $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum (vollständiger normierter Vektorraum) ist. So ist auch die Menge $C^0[0,1]$ abgeschlossen und nicht-leer. Wir zeigen, dass der Operator T eine Kontraktion ist, seien dazu $x \in [0,1]$ und $f, g \in C^0[0,1]$ beliebig, so gilt per Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x) - (Tg)(x)| &= \left|1 + x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - \left(1 + x\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= x\left|\int_0^x t\left(f(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\le x\int_0^x t\left|f(t) - g(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\le x\int_0^x t\mathrm{d}t \sup_{s\in[0,1]} |f(s) - g(s)| \\
&= \frac{1}{2}x^2 \|f - g\|_\infty \\
&\le \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun:

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| \le \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty ,$$

d.h. T ist eine Kontraktion. So sind alle Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt und nach diesen existiert genau eine Funktion $f_* \in C^0[0,1]$ mit

$$f_*(x) = (Tf_*)(x) = 1 + x\int_0^x tf_*(t)\mathrm{d}t \text{ für alle } x \in [0,1].$$

So ist die rechte Seite stetig-differenzierbar, also ist $f_* \in C^1[0,1]$mit der Ableitung

$$f_*'(x) = \int_0^x tf_*(t)\mathrm{d}t + x^2 f_*(x) \text{ für alle } x \in [0,1].$$

Nun ist erneut die rechte Seite stetig-differenzierbar, demnach ist f_*' stetig-differenzierbar, also ist $f_* \in C^2[0,1]$ mit zweiter Ableitung

$$f_*''(x) = xf_*(x) + 2xf_*(x) + x^2 f_*'(x) = 3xf_*(x) + x^2 f_*'(x).$$

Weiter ist $f_*(0) = 1$ und $f_*'(0) = 0$. So ergibt sich das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} f_*'' - x^2 f_*' - 3xf* = 0, \\ f_*(0) = 1, \\ f_*'(0) = 0. \end{cases}$$

□

Aufgabe 4 (Typische Picard-Lindelöf-Aufgabe)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung y auf dem Intervall $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hat und dieses auch gleich das größte Lösungsintervall ist, welches wir mithilfe des Satzes von Picard-Lindelöf erhalten. Berechnen Sie anschließend die ersten Schritte der Picard-Iteration $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ und $y^{(3)}$.

Lösung von Aufgabe 4

Setze $f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, also ist $f \in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$. Zu $r, s > 0$ haben wir das Rechteck $R = (-r,r) \times (-s,s)$ und

$$K := \sup_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = r^2 + s^2.$$

Es gilt laut Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= \left|x^2 + y_1^2 - \left(x^2 + y_2^2\right)\right| = \left|y_1^2 - y_2^2\right| \\ &= |y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2| \\ &\le (|y_1| + |y_2|)\,|y_1 - y_2| \\ &\le 2s\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für alle $(x,y_1), (x,y_2) \in R$. Laut der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung $y\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$ für geeignete $r, s > 0$. Wähle r, s maximal, so ist die maximale Länge des Intervalls $l := 2\min\left\{r, \frac{s}{r^2+s^2}\right\}$. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon (0,\infty) \to (0,\infty),\ s \mapsto \frac{s}{r^2+s^2}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{r^2 + s^2 - 2s^2}{\left(r^2+s^2\right)^2} = \frac{r^2 - s^2}{\left(r^2+s^2\right)^2} \text{ für alle } s \in (0,\infty), \\ 0 = g'(s) &= \frac{r^2 - s^2}{\left(r^2+s^2\right)^2} \ \Leftrightarrow\ r^2 - s^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ r^2 = s^2 \Leftrightarrow\ s = \pm r \\ g''(s) &= \frac{-2s\left(r^2+s^2\right)^2 - 4\left(r^2-s^2\right)\left(r^2+s^2\right)s}{\left(r^2+s^2\right)^4} \\ &= \frac{-2\left(sr^2 + s^3 + 2r^2 s - 2s^3\right)}{\left(r^2+s^2\right)^3} = -2\frac{3sr^2 - s^3}{\left(r^2+s^2\right)^3} \text{ für alle } s \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$g''(r) = -2\frac{3r^3 - r^3}{8r^6} = -\frac{1}{2}r^{-3} < 0 \text{ und } g(r) = \frac{r}{2r^2} = \frac{1}{2r}.$$

Damit wird l maximal für

$$r = g(r) = \frac{1}{2r} \ \Leftrightarrow\ r^2 = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also muss $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelten und wir haben für die eindeutige maximale Lösung $y\colon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \mathbb{R}$. **Picard-Iteration**: Es ergeben sich laut der Vorschrift der Picard-Iteration mit $x_0 = 0 = y_0$:

$$\begin{aligned} y^{(0)}(x) &= y_0 = 0, \\ y^{(1)}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(1-1)}(t)\right)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x f\left(t, y^{(0)}(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t,0)\mathrm{d}t = \int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3, \\ y^{(2)}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(2-1)}(t)\right)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x f\left(t, y^{(1)}(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^x f\left(t, \frac{1}{3}t^3\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9}t^6\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7, \\ y^{(3)}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(3-1)}(t)\right)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x f\left(t, y^{(2)}(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^x f\left(t, \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{2}{189}t^{10} + \frac{1}{3969}t^{14}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{55566}x^{15} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\square$