18.12.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

5. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Homogene Anfangswertprobleme)

Lösen Sie erst die folgenden Differentialgleichungssysteme allgemein und anschließend das jeweils dazugehörige Anfangswertproblem.

(1)
$$y' = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2)
$$y' = \begin{pmatrix}2&2&-3\\1&3&-3\\1&2&-2\end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 1

(1) Es handelt sich um ein homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) &= \det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (1-\lambda)^3 + 1^3 + 1^3 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda)\\
&= \left(1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3\right) + 3\lambda - 1\\
&= 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(3-\lambda).
\end{aligned}$$

Also hat p eine einfache Nullstelle bei $\lambda = 3$ und eine doppelte in $\lambda = 0$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned}
E_0 = \ker(A - 0\cdot I_3) = \ker(A) &= \ker\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},\\
E_3 = \ker(A - 3\cdot I_3) &= \ker\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix}0&-3&3\\1&-2&1\\0&3&-3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Hier benötigen wir nicht den Hauptraum zu 0, denn da stimmen die geomtrische und die algebraische Vielfachheit überein.
Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{0t} \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + C_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Dies liefert direkt $C_1 = C_3$, also ergibt sich das Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
1 &= 2C_1 + C_2, \\
1 &= -C_2 + C_1, \\
C_1 &= C_3.
\end{aligned}
$$

Lösen wir dies, erhalten wir $C_1 = C_3 = \frac{2}{3}$ und $C_2 = -\frac{1}{3}$, d.h. die Lösung lautet:

$$
y(t) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □
(2) Es handelt sich um ein homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) - 6 - 6 + 3(3-\lambda) + 6(2-\lambda) - 2(-2-\lambda) \\
&= -\left(4-\lambda^2\right)(3-\lambda) - 12 + 9 + 12 + 4 - 3\lambda - 6\lambda + 2\lambda \\
&= -\left(12 - 4\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3\right) + 13 - 7\lambda \\
&= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)^3
\end{aligned}
$$

Also hat p eine dreifache Nullstelle bei $\lambda = 1$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für den Eigenraum:

$$
\begin{aligned}
E_1 = \ker(A - 1 \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Hier benötigen wir den ersten Hauptraum zu 1, da sich die geometrische und die algebraische Vielfachheit um eins unterscheiden. Es gilt für den Hauptraum:

$$\begin{aligned} H_1 = \ker\left(A - 1\cdot I_3\right)^2 &= \ker\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \mathbb{R}^3 \\ &= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^t\left(C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right) + C_3\mathrm{e}^t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\left(A - 1I_3\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{e}^t\left(C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right) + C_3\mathrm{e}^t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = y(0) = C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

So sehen wir direkt, dass $C_1 = -1$ und $C_2 = 0$ gelten muss, damit folgt durch Einsetzen $C_3 = 2$. Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + 2\mathrm{e}^t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{e}^t\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (Inhomogene Anfangswertprobleme)

Lösen Sie das folgende inhomogene Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix}2&1&-1\\ \frac{1}{3}&2&0\\ -\frac{2}{3}&0&2\end{pmatrix} y + b, \quad \text{mit } b = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\0\\2\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{72}\\ -\frac{29}{36}\end{pmatrix}.$$

Geben Sie zuvor auch die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen bzw. inhomogenen Differentialgleichungssystems an.

Lösung von Aufgabe 2

Es handelt sich um ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_3\right) &= \det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&-1\\ \frac{1}{3}&2-\lambda&0\\ -\frac{2}{3}&0&2-\lambda\end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^3 - \frac{1}{3}(2-\lambda) - \frac{2}{3}(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right)\\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).
\end{aligned}
$$

Also hat p drei einfache Nullstellen bei $\lambda = 1, 2, 3$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für den Eigenraum:

$$
\begin{aligned}
E_1 = \ker\left(A - 1\cdot I_3\right) &= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ -\frac{2}{3} & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\right\},\\
E_2 = \ker\left(A - 2\cdot I_3\right) &= \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\},\\
E_3 = \ker\left(A - 3\cdot I_3\right) &= \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ \frac{1}{3} & -1 & 0\\ -\frac{2}{3} & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$
y_h(t) = C_1\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 2\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Partikuläre Lösung aufstellen/ Variation der Konstanten: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$
y_p(t) = C_1(t)\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 2\end{pmatrix} + C_2(t)\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + C_3(t)\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.
$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} &= C_1(t)\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + C_2(t)\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3(t)\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\mathrm{e}^{2t}\\ -1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t}\\ 2 & \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\\C_3(t)\end{pmatrix} \Leftrightarrow C'(t) := \begin{pmatrix}C_1'(t),\\C_2'(t)\\C_3'(t)\end{pmatrix} \qquad = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\mathrm{e}^{2t}\\ -1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t}\\ 2 & \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}^{-1}\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\mathrm{e}^{2t}\\ -1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t}\\ 2 & \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösen wir dies (Inerse Matrix berechnen und mit dem Vektor multiplizieren), dann erhalten wir:

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t},\ C_2'(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t} \text{ und } C_3'(t) = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t},$$

d.h.

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\\
C_2(t) &= -\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3t}\\
C_3(t) &= \frac{1}{24}\mathrm{e}^{-4t}.
\end{aligned}$$

Also ist die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4}-\frac{2}{9}+\frac{1}{24}\\ -\frac{1}{2}-\frac{2}{9}-\frac{1}{12}\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\ \frac{5}{72}\\ -\frac{29}{36}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_p(t) + y_h(t)\\
&= \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\ \frac{5}{72}\\ -\frac{29}{36}\end{pmatrix} + C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 6. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{72}\\ -\frac{29}{36}\end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\ \frac{5}{72}\\ -\frac{29}{36}\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

So sehen wir direkt, dass $C_1 = C_3 = \frac{1}{6}$ und $C_2 = 0$ gelten muss. Die Lösung lautet:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{5}{8}\\ \frac{5}{72}\\ -\frac{29}{36}\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 3 (Differentialgleichung mit komplexen Eigenwerten)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix} y + b \text{ mit } b = \begin{pmatrix}1\\1\\5+\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das zugehörige homogene Gleichungssystem allgemein.

(b) Lösen Sie das zugehörige inhomogene Gleichungssystem allgemein.

(c) Lösen Sie das obige Anfangswertproblem.

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(1-\lambda) + 9(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 + 9\right). \end{aligned}$$

Also hat p drei einfache Nullstellen bei $\lambda = 1$ und bei $\lambda = 2 \pm 3\mathrm{i}$.

Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_1 = \ker(A - 1 \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{2-3\mathrm{i}} = \ker(A - (2-3\mathrm{i}) \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 2 & -1+3\mathrm{i} & 2 \\ -3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 2 & -1+3\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & \frac{2+2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wir benötigen bei komplexen Eigenwerten nur einen, der andere ergebe sich durch komplex konjugieren.

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die komplexe Funktion

$$\begin{aligned} z_h(t) &= \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(3t) - \mathrm{i}\sin(3t)\right) \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) - 3\mathrm{i}\sin(3t) + \mathrm{i}\cos(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) - 2\mathrm{i}\sin(3t) + 2\mathrm{i}\cos(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) - \mathrm{i}\sin(3t) - 3\mathrm{i}\cos(3t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

löst das homogene Anfangswertproblem (komplexwertig). Die reelle Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(t) = C_1\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
(b) Man kann hier theoretisch auch wieder Variation der Konstanten anwenden, jedoch wird es schwer eine allgemein gültige Inverse Matrix zu finden. Es empfiehlt sich hier einen anderen Ansatz zu wählen, in dem man die Form der partikulären Lösung "ratet".
Schritt 4. Partikuläre Lösung durch "Raten": Dafür zerlegen wir unsere Nicht-Linearität in mehrere Teile.

$$b_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } b_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also gilt:

$$b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 + e^{2t} \end{pmatrix} = b_1(t) + b_2(t).$$

Für den ersten Fall machen wir den Ansatz

$$y_{p,1}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung ein. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y'_{p,1}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} y_{p,1}(t) + b_1(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösen wir dies, erhalten wir

$$a = 1,\ b = 1,\ c = -1 \text{ bzw. } y_{p,1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Fall machen wir den Ansatz

$$y_{p,2}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung ein, dies ergibt:

$$\begin{aligned} 2e^{2t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = y'_{p,2}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} y_{p,2}(t) + b_2(t) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2I_3 \right] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösen wir dies, erhalten wir

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3},\ c = 0 \text{ bzw. } y_{p,2}(t) = \frac{e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Schritt 5. Allgemeine Lösung aufstellen: So ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(c) **Schritt 6. Spezielle Lösung aufstellen**: Wegen der Anfangswertbedingung

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muss gelten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3C_1 \\ 3C_2 \\ 3C_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystem erhalten wir

$$3C_1 = -3, \; 3C_2 = 0 \text{ und } 3C_3 = -1,$$

bzw.

$$C_1 = -1, \; C_2 = 0 \text{ und } C_3 = -\frac{1}{3}.$$

Dies liefert die spezielle Lösung zum Anfangswertproblem:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □