

# Höhere Mathematik III für Physik

## 7. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1 (Separationsansatz)

Wir betrachten das folgende Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) &= 0 \text{ für } t > 0, x \in (0, 1) \\ \partial_x u(t, 0) &= 0 = \partial_x u(t, 1) \text{ für } t > 0, \\ u(0, x) &= 1 + \cos(\pi x) \text{ für } x \in [0, 1].\end{aligned}$$

Bestimmen Sie erst allgemein alle Lösungen der Form

$$u(t, x) = w(x)v(t)$$

der obigen Differentialgleichung und lösen Sie anschließend das Rand- und Anfangswertproblem.

### Lösung von Aufgabe 1

**Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten:** Wir machen den Separationsansatz

$$u(t, x) = v(t)w(x).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) &= v'(t)w(x), \\ \partial_x u(t, x) &= v(t)w'(x), \\ \partial_{xx} u(t, x) &= v(t)w''(x).\end{aligned}$$

**Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen:** Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = v'(t)w(x) - v(t)w''(x) \\ \Leftrightarrow v(t)w''(x) &= v'(t)w(x) \\ \Leftrightarrow \frac{w''(x)}{w(x)} &= \frac{v'(t)}{v(t)}.\end{aligned}$$

**Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen:** Da dies für alle  $t, x$  gelten muss, müssen die beiden Quotienten

$$\frac{w''(x)}{w(x)} \text{ und } \frac{v'(t)}{v(t)}$$

gleich und konstant einem  $\lambda^2$  sein mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , d.h.

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda^2 = \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}v'(t) &= \lambda^2 v(t), \\ w''(x) &= \lambda^2 w(x).\end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.

**Lösung zu  $v$ :** Die Lösung zu  $v$  lautet nun

$$v(t) = Ce^{\lambda^2 t}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit einer Konstanten  $C$ .

**Lösung zu  $w$ :** Umgestellt bekommen wir

$$w''(x) - \lambda^2 w(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in  $\mu = \pm\lambda$ . Als Lösung folgt nun

$$w(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$

falls  $\lambda \neq 0$  und sonst ( $\lambda = 0$ )

$$w(x) = C_1 + C_2 x$$

für jeweils alle  $x \in \mathbb{R}$  mit Konstanten  $C_1, C_2$ .

**Schritt 4. Randdaten beachten:** Ist nun  $\lambda = 0$ , so erhalten wir für  $u$ :

$$u^{(0)}(t, x) = v^{(0)}(t)w^{(0)}(x) = C^{(0)} \left( C_1^{(0)} + C_2^{(0)} x \right)$$

für alle  $t, x \in \mathbb{R}$ , bzw. für  $\lambda \neq 0$

$$u^{(\lambda)}(t, x) = v^{(\lambda)}(t)w^{(\lambda)}(x) = C^{(\lambda)} e^{\lambda^2 t} \left( C_1^{(\lambda)} e^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda x} \right)$$

für alle  $t, x \in \mathbb{R}$ . O.B.d.A. wählen wir  $C^{(\lambda)} = 1$  für alle möglichen  $\lambda$ . Wir möchten nun, dass die Randbedingung

$$\partial_x u^{(\lambda)}(t, 0) = 0 = \partial_x u^{(\lambda)}(t, 1)$$

für alle zulässigen  $\lambda$  erfüllt ist, dafür berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_x u^{(0)}(t, x) &= C_2^{(0)}, \\ \partial_x u^{(\lambda)}(t, x) &= e^{\lambda^2 t} \left( -C_1^{(\lambda)} \lambda e^{-\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} \right) \\ &= e^{\lambda^2 t} \lambda \left( -C_1^{(\lambda)} e^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda x} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt automatisch

$$0 = \partial_x u^{(0)}(t, 0) = C_2^{(0)} = \partial_x u^{(0)}(t, 1),$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} e^{\lambda^2 t} \lambda \left( -C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} \right) &= \partial_x u^{(\lambda)}(t, 0) = 0 = \partial_x u^{(\lambda)}(t, 1) = e^{\lambda^2 t} \lambda \left( -C_1^{(\lambda)} e^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda} \right) \\ \Leftrightarrow -C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} &= 0 = -C_1^{(\lambda)} e^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = C_2 \\ 0 = -C_1^{(\lambda)} e^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda} \end{cases} \\ \Rightarrow 0 &= -C_1^{(\lambda)} e^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda} = -C_2^{(\lambda)} e^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} e^{\lambda} = C_2^{(\lambda)} (-e^{-\lambda} + e^{\lambda}) \\ \Leftrightarrow -e^{-\lambda} + e^{\lambda} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-\lambda} &= e^{\lambda} \\ \Leftrightarrow e^{2\lambda} &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda &= ik\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Schritt 5. Allgemeine Lösung  $u_N$  aufstellen:** Sei  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k = ik\pi$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $C_j^{(\lambda_k)} =: C_j^{(k)}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $j = 1, 2$ . Dann ist die (komplexwertige) Lösung  $u_N$  von der Form

$$\begin{aligned} u_N(t, x) &= u^{(0)}(t, x) + \sum_{k=1}^N u^{(k)}(t, x) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N e^{-k^2 \pi^2 t} \left( C_1^{(k)} e^{-ik\pi x} + C_2^{(k)} e^{ik\pi x} \right) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N e^{-k^2 \pi^2 t} \left( C_1^{(k)} e^{-ik\pi x} + C_1^{(k)} e^{ik\pi x} \right) \end{aligned}$$

$$= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N e^{-k^2 \pi^2 t} C_1^{(k)} (e^{-ik\pi x} + e^{ik\pi x})$$

für alle  $t, x \in \mathbb{R}$  mit Konstanten  $C_1^{(0)} \in \mathbb{C}$  und  $C_1^{(k)} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Damit ist die (reellwertige) Lösung  $u_N$  von der Form

$$u_N(t, x) = \tilde{C}_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N e^{-k^2 \pi^2 t} \left( \tilde{C}_1^{(k)} \sin(k\pi x) + \tilde{C}_2^{(k)} \cos(k\pi x) \right)$$

für alle  $t, x \in \mathbb{R}$  mit Konstanten  $\tilde{C}_1^{(0)} \in \mathbb{R}$  und  $\tilde{C}_1^{(k)}, \tilde{C}_2^{(k)} \in \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

**Schritt 6. Spezielle Lösung  $u$  aufstellen:** Die Anfangsbedingung liefert nun

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\pi x) = u(0, x) &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N \left( C_1^{(k)} e^{-ik\pi x} + C_2^{(k)} e^{ik\pi x} \right) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N \left( C_1^{(k)} e^{-ik\pi x} + C_1^{(k)} e^{ik\pi x} \right) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^N C_1^{(k)} (e^{-ik\pi x} + e^{ik\pi x}) \end{aligned}$$

wähle  $N = 1$ ,  $C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$  und  $C_1^{(0)} = 1$ , so erhalten wir die Lösung

$$u(t, x) = 1 + e^{-\pi^2 t} \frac{1}{2i} (e^{-ik\pi x} + e^{ik\pi x}) = 1 + e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

für alle  $t, x \in \mathbb{R}$ . □

**Bemerkung:** In der Lösung bezeichnen wir der Einfachheit halber sowohl die reellwertige als auch die komplexwertige Lösung jeweils mit  $u_N$ , diese unterscheiden sich aber natürlich. Mit welcher wir aber weiterarbeiten ist dabei egal (!), beide führen auf dasselbe Ergebnis. Für die reellwertige Lösung müssen wir die Konstanten wie folgt wählen:

$$N = 1, \tilde{C}_1^{(0)} = 1, \tilde{C}_1^{(1)} = 0 \text{ und } \tilde{C}_2^{(1)} = 1.$$

Dies liefert nun die Lösung

$$u(t, x) = 1 + e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

für alle  $t, x \in \mathbb{R}$ .

## Aufgabe 2 (Laplace in Polarkoordinaten)

Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  eine Funktion. Berechnen Sie den Laplace in Polarkoordinaten, d.h. zeigen Sie, dass für

$$u(r, \varphi) = f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

der Laplace Operator die folgende Darstellung hat:

$$\Delta f(x, y) = \partial_{rr} u(r, \varphi) + \frac{1}{r} \partial_r u(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u(r, \varphi).$$

### Lösung von Aufgabe 2

**Schritt 1. Partielle Ableitungen bestimmen:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_r u(r, \varphi) &= \cos(\varphi) \partial_x f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \partial_y f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)), \\ \partial_{rr} u(r, \varphi) &= \cos^2(\varphi) \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \partial_{xy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \sin^2(\varphi) \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)), \\ \partial_{\varphi} u(r, \varphi) &= -r \sin(\varphi) \partial_x f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + r \cos(\varphi) \partial_y f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)), \\ \partial_{\varphi\varphi} u(r, \varphi) &= r^2 \sin^2(\varphi) \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - 2r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \partial_{xy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &\quad + r^2 \cos^2(\varphi) \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - r \cos(\varphi) \partial_x f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &\quad - r \sin(\varphi) \partial_y f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &= \frac{1}{r^2} \left( \sin^2(\varphi) \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \partial_{xy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \right. \end{aligned}$$

$$+ \cos^2(\varphi) \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) - \frac{1}{r} \left( \cos(\varphi) \partial_x f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \partial_y f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \right).$$

**Schritt 2. Einsetzen und Zusammenfassen:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{rr} u(r, \varphi) + \frac{1}{r} \partial_r u(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u(r, \varphi) &= \cos^2(\varphi) \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \partial_{xy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &\quad + \sin^2(\varphi) \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \frac{1}{r} \left( \cos(\varphi) \partial_x f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \right. \\ &\quad \left. + \sin(\varphi) \partial_y f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \right) + \sin^2(\varphi) \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &\quad - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \partial_{xy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \cos^2(\varphi) \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &\quad - \frac{1}{r} \left( \cos(\varphi) \partial_x f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) \partial_y f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \right) \\ &= (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &\quad + (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &= \partial_{xx} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \partial_{yy} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ &= \Delta f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \Delta f(x, y). \end{aligned}$$

□

### Aufgabe 3 (Laplace Gleichung)

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \text{ auf } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}, \\ u(x, y) &= x \text{ auf } \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Nutzen Sie dabei Polarkoordinaten (siehe auch Aufgabe 2) und wenden Sie einen Separationsansatz an.

#### Lösung von Aufgabe 3

**Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten:** Wir setzen

$$v(r, \varphi) = u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Wir machen den Separationsansatz

$$v(r, \varphi) = a(r)b(\varphi).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_r v(r, \varphi) &= a'(r)b(\varphi), \\ \partial_{rr} v(r, \varphi) &= a''(r)b(\varphi), \\ \partial_\varphi v(r, \varphi) &= a(r)b'(\varphi), \\ \partial_{\varphi\varphi} v(r, \varphi) &= a(r)b''(\varphi). \end{aligned}$$

**Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen:** Laut Aufgabe 2. erhalten wir und setzen gleich den Ansatz ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u(x, y) = \partial_{rr} v(r, \varphi) + \frac{1}{r} \partial_r v(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} v(r, \varphi) \\ &= a''(r)b(\varphi) + \frac{1}{r} a'(r)b(\varphi) + \frac{1}{r^2} a(r)b''(\varphi) \text{ für } r > 1, \varphi \in [0, 2\pi] \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{r^2} a(r)b''(\varphi) &= \left( a''(r) + \frac{1}{r} a'(r) \right) b(\varphi) \\ \Leftrightarrow -\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} &= r^2 \frac{a''(r)}{a(r)} + r \frac{a'(r)}{a(r)}, \\ v(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) &= u(x, y) = x = \cos(\varphi), \\ b(0) &= b(2\pi), \\ b'(0) &= b'(2\pi). \end{aligned}$$

**Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen:** Da dies für alle  $r, \varphi$  gelten muss, müssen die beiden Seiten

$$-\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} \text{ und } r^2 \frac{a''(r)}{a(r)} + r \frac{a'(r)}{a(r)}$$

gleich und konstant einem  $\lambda^2$  sein mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , d.h.

$$-\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} = \lambda^2 = r^2 \frac{a''(r)}{a(r)} + r \frac{a'(r)}{a(r)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} b''(\varphi) &= -\lambda^2 b(\varphi), \\ r^2 a''(r) + r a'(r) - \lambda^2 a(r) &= 0. \end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.

**Lösung zu  $b$ :** Umgestellt bekommen wir

$$b''(\varphi) + \lambda^2 b(\varphi) = 0.$$

Das dazugehörige charakteristische Polynom lautet

$$p(\mu) = \mu^2 + \lambda^2 = (\mu + i\lambda)(\mu - i\lambda)$$

mit Nullstellen in  $\mu = \pm i\lambda$ . Die Lösung zu  $b$  lautet nun

$$b^{(\lambda)}(\varphi) = C_{1,1}^{(\lambda)} e^{-i\lambda\varphi} + C_{1,2}^{(\lambda)} e^{i\lambda\varphi},$$

falls  $\lambda \neq 0$  ist, sonst ( $\lambda = 0$ )

$$b(\varphi) = C_{1,1}^{(0)} + C_{1,2}^{(0)} \varphi.$$

**Lösung zu  $a$ :** Dies ist eine Euler-Differentialgleichung, dazu setzen wir  $r = e^t$  und  $z(t) = a(e^t)$ . Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^t a'(e^t), \\ z''(t) &= e^t a'(e^t) + e^{2t} a''(e^t) = z'(t) + e^{2t} a''(e^t) \\ \Leftrightarrow e^{2t} a''(e^t) &= z''(t) - z'(t). \end{aligned}$$

Dann folgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 a''(r) + r a'(r) - \lambda^2 a(r) = e^{2t} a''(e^t) + e^t a'(e^t) - \lambda^2 a(e^t) \\ &= (z''(t) - z'(t)) + z'(t) - \lambda^2 z(t) = z''(t) - \lambda^2 z(t). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom zur Differentialgleichung von  $z$  lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda),$$

mit Nullstellen in  $\mu = \pm \lambda$ . Also lautet die Lösung zu  $z$

$$z^{(\lambda)}(t) = C_{2,1}^{(\lambda)} e^{-\lambda t} + C_{2,2}^{(\lambda)} e^{\lambda t},$$

falls  $\lambda \neq 0$ , sonst ( $\lambda = 0$ )

$$z^{(0)}(t) = C_{2,1}^{(0)} + C_{2,2}^{(0)} t.$$

Resubstituieren  $t = \log(r)$  liefert nun

$$\begin{aligned} a^{(\lambda)}(r) &= z^{(\lambda)}(\log(r)) = C_{2,1}^{(\lambda)} e^{-\lambda \log(r)} + C_{2,2}^{(\lambda)} e^{\lambda \log(r)} \\ &= C_{2,1}^{(\lambda)} r^{-\lambda} + C_{2,2}^{(\lambda)} r^{\lambda}, \end{aligned}$$

falls  $\lambda \neq 0$  ist, sonst ( $\lambda = 0$ )

$$a^{(0)}(r) = z^{(0)}(\log(r)) = C_{2,1}^{(0)} + C_{2,2}^{(0)} \log(r).$$

**Schritt 4. Randdaten beachten:** Im Fall  $\lambda = 0$  liefert

$$\begin{aligned} C_{1,1}^{(0)} &= b^{(0)}(0) = b^{(0)}(2\pi) = C_{1,1}^{(0)} + 2C_{1,2}^{(0)}\pi \\ \Leftrightarrow C_{1,2}^{(0)} &= 0, \end{aligned}$$

$$b^{(0)}(0) = C_{1,2}^{(0)} = b^{(0)}(2\pi),$$

d.h.

$$b^{(0)}(\varphi) = C_{1,1}^{(0)}.$$

Dann ist

$$v^{(0)}(r, \varphi) = a^{(0)}(r)b^{(0)}(\varphi) = C_{1,1}^{(0)} \left( C_{2,1}^{(0)} + C_{2,2}^{(0)} \log(r) \right) =: C_1^{(0)} + C_2^{(0)} \log(r).$$

Für  $\lambda \neq 0$  liefern die Randbedingungen durch Addition beider Gleichungen

$$\begin{aligned} C_{1,1}^{(\lambda)} + C_{1,2}^{(\lambda)} &= b^{(\lambda)}(0) = b^{(\lambda)}(2\pi) = C_{1,1}^{(\lambda)} e^{-2\pi i \lambda} + C_{1,2}^{(\lambda)} e^{2\pi i \lambda}, \\ -i\lambda C_{1,1}^{(\lambda)} + i\lambda C_{1,2}^{(\lambda)} &= b^{(\lambda)}(0) = b^{(\lambda)}(2\pi) = -i\lambda C_{1,1}^{(\lambda)} e^{-2\pi i \lambda} + i\lambda C_{1,2}^{(\lambda)} e^{2\pi i \lambda} \\ \Leftrightarrow -C_{1,1}^{(\lambda)} + C_{1,2}^{(\lambda)} &= b^{(\lambda)}(0) = b^{(\lambda)}(2\pi) = -C_{1,1}^{(\lambda)} e^{-2\pi i \lambda} + C_{1,2}^{(\lambda)} e^{2\pi i \lambda} \\ &\Rightarrow 2C_{1,2}^{(\lambda)} = 2C_{1,1}^{(\lambda)} e^{2\pi i \lambda} \\ &\Leftrightarrow e^{2\pi i \lambda} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda = k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

So lautet nun

$$\begin{aligned} v^{(k)}(r, \varphi) &= a^{(k)}(r)b^{(k)}(\varphi) = \left( C_{2,1}^{(k)} r^{-k} + C_{2,2}^{(k)} r^k \right) \left( C_{1,1}^{(k)} e^{-ik\varphi} + C_{1,2}^{(k)} e^{ik\varphi} \right) \\ &= C_1^{(k)} r^{-k} e^{-ik\varphi} + C_2^{(k)} r^{-k} e^{ik\varphi} + C_3^{(k)} r^k e^{-ik\varphi} + C_4^{(k)} e^{ik\varphi}. \end{aligned}$$

Die Terme  $(r, \varphi) \mapsto \log(r)$ ,  $(r, \varphi) \mapsto r^k e^{-ik\varphi}$  und  $(r, \varphi) \mapsto r^k e^{ik\varphi}$  sind auf der Menge  $[1, \infty) \times [0, 2\pi]$  unbeschränkt, daher muss

$$C_2^{(0)} = C_3^{(k)} = C_4^{(k)} = 0$$

gelten, also gilt:

$$\begin{aligned} v^{(0)}(r, \varphi) &= C_1^{(0)}, \\ v^{(k)}(r, \varphi) &= C_1^{(k)} r^{-k} e^{-ik\varphi} + C_2^{(k)} r^{-k} e^{ik\varphi}. \end{aligned}$$

**Schritt 5. Allgemeine Lösung  $v_N$  aufstellen:** Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Die (komplexwertige) Lösung  $v_N$  lautet nun:

$$\begin{aligned} v_N(r, \varphi) &= v^{(0)}(r, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(r, \varphi) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( C_1^{(k)} r^{-k} e^{-ik\varphi} + C_2^{(k)} r^{-k} e^{ik\varphi} \right) \end{aligned}$$

für alle  $r \geq 1$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  und Konstanten  $C_1^{(0)}, C_2^{(0)} \in \mathbb{C}$  und  $C_1^{(k)}, C_2^{(k)} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Die (reellwertige) Lösung  $v_N$  lautet nun:

$$v_N(r, \varphi) = \tilde{C}_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \tilde{C}_1^{(k)} r^{-k} \sin(k\varphi) + \tilde{C}_2^{(k)} r^{-k} \cos(k\varphi) \right).$$

für alle  $r \geq 1$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  und Konstanten  $\tilde{C}_1^{(0)}, \tilde{C}_2^{(0)} \in \mathbb{R}$  und  $\tilde{C}_1^{(k)}, \tilde{C}_2^{(k)} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

**Schritt 6. Spezielle Lösung  $v$  aufstellen:** Die Anfangsbedingung liefert uns nun

$$\cos(\varphi) = v(1, \varphi) = C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( C_1^{(k)} e^{-ik\varphi} + C_2^{(k)} e^{ik\varphi} \right),$$

dass  $C_1^{(0)} = 0$ ,  $N = 1$  und  $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = \frac{1}{2}$ . Also folgt lautet die Lösung  $v$  nun

$$v(r, \varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{r}.$$

**Schritt 7. Rücksubstituieren:** Dies liefert nun die Lösung  $u$ :

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

für alle  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ . □

**Hinweise:**

- Die schriftliche Klausur findet am Dienstag, den 26.02.2019 von 13.00 bis 15.00 Uhr statt.
- Der Anmeldeschluss für die Klausur ist Sonntag, der 10.02.2019, man kann sich online im Campus System anmelden.
- Meldet Euch bitte rechtzeitig an, und überprüft ein paar Tage später, ob eure Anmeldung tatsächlich eingetragen ist im Campus System.
- Abmelden (ohne irgendwelche Konsequenzen) ist jederzeit möglich. Zum einen könnt ihr Euch online bis einen Tag vor der Klausur oder direkt vor der Prüfung vor Ort bei den Aufsichtspersonen abmelden.
- Sollten Fragen zu der Vorlesung, den Übungs- und/ oder Tutoriumsblättern bestehen, so wendet Euch an Michael Ullmann (michael.ullmann@kit.edu oder im Büro 2.033/2.034).