01.11.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

1. Tutoriumsblatt - Lösungsvorschläge
(wird am Freitag, den 02.11.2018 besprochen)

Aufgabe 1 (Zerfallsrate von Iod - 131)

Welche konstante Zerfallsrate in Mol pro Tag hat Iod - 131, von dem innerhalb von 8 Tagen die Hälfte zerfallen ist? Geben Sie die zugehörige Differentialgleichung an.

Lösung von Aufgabe 1

Wir bezeichnen mit $s(t)$ die noch vorhandene Stoffmenge zum Zeitpunkt t, sowie mit $a := s(0) > 0$ die Anfangsstoffmenge. Weiter wissen wir, dass

$$s(8) = \frac{s(0)}{2}$$

und

$$\dot{s}(t) \sim s(t)$$

ist für alle t. Dadurch ergibt sich folgendes Anfangswertproblem für eine Konstante $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\lambda s(t) \text{ für alle } t > 0 \\ s(0) = a. \end{cases}$$

Hierbei handelt es sich um eine lineare, homogene Dfferentialgleichung erster Ordnung.
Schritt 1. Lösung der homogenen Gleichung: Die Lösung lautet:

$$s(t) = s_h(t) = C\mathrm{e}^{\int -\lambda \mathrm{d}\tau} = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

für alle $t \geq 0$.
Schritt 2. Herleitung der speziellen Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$s(0) = C\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0} = C\mathrm{e}^0 = C,$$

d.h. es gilt für alle $t \geq 0$:

$$s(t) = s(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Wegen der Zerfallsbedingung haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{s(0)}{2} &= s(8) = s(0)\mathrm{e}^{-8\lambda} \\ \Leftrightarrow \ \mathrm{e}^{-8\lambda} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \ 2 &= \mathrm{e}^{8\lambda} \\ \Leftrightarrow \ 8\lambda &= \log(2) \\ \Leftrightarrow \ \lambda &= \frac{\log(2)}{8}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als spezielle Lösung:

$$s(t) = s(0)\mathrm{e}^{-\frac{\log(2)}{8}t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

□

Aufgabe 2 (Einige Beispiele für verschiedene DGL-Typen)

Charakterisieren und Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/ Anfangswertprobleme.

(1) $y' = -y^2 + (1-2x)y + 2x$.

(2) $y' + y + \frac{1}{y} = 0$.

(3) $xy' = y + \sqrt{xy}$.

(4) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}$, $y(\pi) = 0$.

Lösung von Aufgabe 2

(1) Es handelt sich um eine inhomogene Riccati-Differentialgleichung.
Schritt -1. Lösung erraten und Substitution zur homogenen Riccati-Differentialgleichung: Wir sehen, dass $\widetilde{y} \equiv 1$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist, denn es gilt:

$$-\widetilde{y}^2 + (1-2x)\widetilde{y} + 2x = -1^2 + (1-2x)\cdot 1 + 2x = -1 + 1 - 2x + 2x = 0 = \widetilde{y}'.$$

Also existiert eine Lösung der Differentialgleichung (1), also sei nun y die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1). Setze nun

$$u := y - \widetilde{y} = y - 1 \;\Leftrightarrow\; y = u + 1.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (1) ergibt

$$\begin{aligned} u' &= (y-1)' = y' = -y^2 + (1-2x)y + 2x \\ &= -(u+1)^2 + (1-2x)(u+1) + 2x = -\left(u^2 + 2u + 1\right) + (1 - 2xu - 2x + u) + 2x \\ &= -u^2 - (1+2x)\,u. \; \left(\widetilde{1}\right) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine homogene Riccati-Differentialgleichung.
Schritt 0. Substituieren zu einer "elementar-lösbaren" Gleichung: Wir multiplizieren die Differentialgleichung $\left(\widetilde{1}\right)$ mit $\frac{1}{u^2}$ und substituieren mit

$$v := u^{1-n} = u^{-1} = \frac{1}{u} \text{ mit } n = 2,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{1}\right) \;&\Leftrightarrow\; \frac{u'}{u^2} = -1 - (1+2x)\frac{1}{u} = -\left(1 + (1+2x)\frac{1}{u}\right) \\ &\Leftrightarrow\; v' = -\frac{u'}{u^2} = 1 + (1+2x)\frac{1}{u} = 1 + (1+2x)\,v. \; (1') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.
Schritt 1. Lösung der homogenen Gleichung zu (1'):

$$v_h'(x) = (1+2x)\,v_h(x).$$

Die Lösung der homogenen Gleichung zu (1') lautet:

$$v_h(x) = C\mathrm{e}^{\int(1+2z)\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{x+x^2} = C\mathrm{e}^{(1+x)x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleitung der partikulären Lösung zu (1'): Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung zu (1') machen wir den Ansatz:

$$v_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{(1+x)x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (1') ergibt:

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{(1+x)x} + (1+2x)\,C(x)\mathrm{e}^{(1+x)x} = v_p'(x) = 1 + (1+2x)\,v_p(x) &= 1 + (1+2x)\,C(x)\mathrm{e}^{(1+x)x} \\ \Leftrightarrow\; C'(x)\mathrm{e}^{(1+x)x} &= 1 \\ \Leftrightarrow\; C'(x) &= \mathrm{e}^{-(1+x)x}. \end{aligned}$$

Also gilt für C:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z}\mathrm{d}z \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dieses Integral ist nicht weiter berechenbar. Also ist die partikuläre Lösung gegeben durch

$$v_p(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z}\mathrm{d}z\mathrm{e}^{(1+x)x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (1'): Die allgemeine Lösung zu (1') lautet:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_p(x) + v_h(x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z \mathrm{e}^{(1+x)x} + C\mathrm{e}^{(1+x)x} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z + C \right) \mathrm{e}^{(1+x)x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zu $\left(\widetilde{1}\right)$: Über die Rücksubstitution

$$u = \frac{1}{v}$$

bekommen wir:

$$u(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-(1+x)x}}{\left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z + C \right)},$$

was für alle $C \in \mathbb{R}$ existiert, aber eventuell existiert (genau) ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{x_0} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z + C = 0.$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung zu (1): Die allgemeine Lösung zur Dfferentialgleichung (1) lautet

$$\begin{aligned} y(x) = u(x) + 1 &= \frac{\mathrm{e}^{-(1+x)x}}{\left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z + C \right)} + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(1+x)x} + \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z + C}{\left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(1+z)z} \mathrm{d}z + C \right)} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_0\}$. □
(2) Es handelt sich hierbei um eine nicht-lineare Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = -1$.
Schritt 0. Substituieren zu einer "elementar-lösbaren" Gleichung: Wir multiplizieren die Differentialgleichung (2) mit y und substituieren $u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (1) \;\Leftrightarrow\; yy' &= -y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\; u' = 2yy' &= -2y^2 - 2 = -2u - 2. \; (2') \end{aligned}$$

Nun handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung.
Schritt 1. Lösung der homogenen Gleichung zu (2'):

$$u_h(x) = -2u_h(x).$$

Die Lösung dazu ist gegeben durch

$$u_h(x) = C\mathrm{e}^{\int -2\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Aufstellen der partikuläre Lösung: Motiviert durch die homogene Lösung zur Differentialgleichung (2') machen wir den Ansatz

$$u_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (2') ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} &= u_p'(x) = -2u_p(x) - 2 = -2C(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2 \\ \Leftrightarrow\; C'(x)\mathrm{e}^{-2x} &= -2 \\ \Leftrightarrow\; C'(x) &= -2\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$C(x) = \int -2\mathrm{e}^{2z} \mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich für die partikuläre Lösung zur Differentialgleichung (2'):

$$u_p(x) = -\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} = -1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Allgemeine Lösung zur Gleichung (2'): Die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (2') lautet:

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = -1 + C\mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zur allgemeinen Lösung von Gleichung (2): Über die Rücksubstitution $y = \pm\sqrt{u}$ erhalten wir als allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (2):

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm\sqrt{u(x)} \\ &= \pm\sqrt{C\mathrm{e}^{-2x} - 1}, \end{aligned}$$

d.h. für die Existenz muss $C > 0$ und $x \leq \frac{\log(C)}{2}$ sein. □
(3) Es handelt sich hierbei um eine homogene Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = \frac{1}{2}$.
Schritt 0. Substituieren zu einer "elementar-lösbaren" Gleichung: Wir multiplizieren die Differentialgleichung (3) mit $y^{-\frac{1}{2}}$ und substituieren $u = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (3) \;\Leftrightarrow\; \frac{y'}{\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{y}}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow\; u' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{y}}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}u + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (3') \end{aligned}$$

Nun handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung.
Schritt 1. Lösung der homogenen Gleichung zu (3'):

$$u_h(x) = \frac{1}{2x}u_h(x).$$

Die Lösung dazu ist gegeben durch

$$u_h(x) = C\mathrm{e}^{\int \frac{1}{2z}\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log(|x|)} = C\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in [0, \infty)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die homogene Lösung zur Differentialgleichung (3') machen wir den Ansatz

$$u_p(x) = C(x)\sqrt{|x|}.$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (3') ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} C'(x)\sqrt{|x|} + \frac{C(x)\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}} &= u_p'(x) = \frac{1}{2x}u_p(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{C(x)\operatorname{sign}(x)}{2x}\sqrt{|x|} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow\; C'(x)\sqrt{|x|} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow\; C'(x) &= \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$, d.h.

$$C(x) = \int \frac{1}{2z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\log(|x|).$$

Damit ergibt sich für die partikuläre Lösung zur Differentialgleichung (3'):

$$u_p(x) = \frac{1}{2}\log(|x|)\sqrt{|x|} = \frac{1}{2}\log(x)\sqrt{x}$$

für alle $x \in (0, \infty)$.
Schritt 3. Allgemeine Lösung zur Gleichung (3'): Die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (3') lautet:

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = \frac{1}{2}\log(x)\sqrt{x} + C\sqrt{x} = \left(\frac{1}{2}\log(x) + C\right)\sqrt{x}$$

für alle $x \in (0, \infty)$.
Schritt 4. Rücksubstitution zur allgemeinen Lösung von Gleichung (3): Über die Rücksubstitution $y = u^2$ erhalten wir als allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (3):

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\log(x) + C\right)^2 x,$$

für alle $x > 0$ und Konstanten $C \in \mathbb{R}$. $\square$

(4) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.
Schritt 1. Lösung der homogenen Gleichung zu (4):

$$y_h(x) = -\frac{2}{x} y_h(x).$$

Die Lösung dazu ist gegeben durch

$$y_h(x) = C\mathrm{e}^{\int -\frac{2}{z}\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{-2\log(|x|)} = \frac{C}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Aufstellen der partikulären Lösung zu (4): Motiviert durch die homogene Lösung zur Differentialgleichung (4) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x^2}.$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (4) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^3} &= y_p'(x) = -\frac{2}{x}y(x) + \frac{\cos(x)}{x^2} = -\frac{2C(x)}{x^3} + \frac{\cos(x)}{x^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{C'(x)}{x^2} &= \frac{\cos(x)}{x^2} \\ \Leftrightarrow \quad C'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$C(x) = \int \cos(z)\mathrm{d}z = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich für die partikuläre Lösung zur Differentialgleichung (4):

$$y_p(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Schritt 3. Allgemeine Lösung zur Gleichung (4): Die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung (4) lautet:

$$\begin{aligned} y(x) = y_p(x) + y_h(x) &= \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{C}{x^2} \\ &= (\sin(x) + C)\,\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Schritt 4. Aufstellen der speziellen Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung $y(\pi) = 0$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 0 = y(\pi) &= (\sin(\pi) + C)\,\frac{1}{\pi^2} = \frac{C}{\pi^2} \\ \Leftrightarrow \quad C &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die allgemeine Lösung zum Anfangswertproblem (4) lautet:

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

für alle $x \in (0, \infty)$. (Da $\pi \in (0, \infty)$ liegt, nehmen wir dieses Intervall anstatt das Intervall $(-\infty, 0)$ und y ist in Null nicht stetig fortsetzbar geschweige denn stetig differenzierbar.) $\square$

Aufgabe 3 (Zu exakten DGL)

Prüfen Sie zuerst, ob die Differentialgleichung exakt ist und geben Sie im Falle der Exaktheit die Lösung in expliziter (falls möglich) bzw. in impliziter Form an.

(1) $\big(3xy + y^2\big)\,\mathrm{d}x + \big(x^2 + xy\big)\,\mathrm{d}y = 0.$

(2) $(12xy + 3)\,\mathrm{d}x + 6x^2\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 1.$

(3) $(2x\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}x + \big(x^2\mathrm{e}^y + 1\big)\,\mathrm{d}y = 0,\ x(0) = 1.$

Lösung von Aufgabe 3

(1) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 3xy + y^2 \text{ und } Q(x,y) = x^2 + xy$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= 3x + 2y,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= 2x + y\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}3x + 2y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = 2x + y\\ \Leftrightarrow\ x &= -y\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = -y\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (1) ist nicht exakt. $\square$

(2) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 12xy + 3 \text{ und } Q(x,y) = 6x^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $x_0 = 1 = y_0$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= 12x,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= 12x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Das Gebiet $\mathbb{R}^2$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend, also erfüllt die Differentialgleichung (2) die Integrabilitätsbedingungen und ist somit exakt. D.h. es existiert eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist.
Schritt 2. Bestimmung der Stammfunktion F: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl der ersten Komponente:

$$F(x,y) = \int P(z,y)\mathrm{d}z = \int (12zy + 3)\,\mathrm{d}z = 6x^2y + 3x + C(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}6x^2 = Q(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x,y) = 6x^2 + C'(y)\\ \Leftrightarrow\ C'(y) &= 0,\end{aligned}$$

d.h. $C(\cdot)$ ist konstant und o.B.d.A. können wir $C \equiv 0$ wählen. Damit haben wir die Stammfunktion

$$F(x,y) = 6x^2y + 3x \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (2): Es gilt:

$$Q(x_0, y_0) = Q(1,1) = 6 \cdot 1^2 = 6 \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F(x_0, y_0) = F(1,1) = 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9.$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = x_0 \in I_x$ so, dass die Gleichung

$$F(x,y) = F(x_0, y_0) = F(1,1) = 9$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 1$ hat. Diese Lösung y ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (2).
Schritt 4. Nach y auflösen??: Es gilt für alle $x \in I_x$ durch Umstellen:

$$\begin{aligned} 6x^2 y(x) + 3x &= F(x, y(x)) = F(1,1) = 9 \\ \Leftrightarrow\ 2x^2 y(x) &= 3 - x \\ \Leftrightarrow\ y(x) &= \frac{3-x}{2x^2}. \end{aligned}$$

Nun können wir I_x als das maximale Intervall wählen und dieses ist $I_x = (0, \infty)$. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems (2) gegeben durch

$$y(x) = \frac{3-x}{2x^2} \text{ für alle } x \in (0, \infty).$$

$\square$

Bemerkung zur Auflösbarkeit nach x: Wir finden wegen

$$P(1,1) = 12 \cdot 1 \cdot 1 + 3 = 12 + 3 = 15 \neq 0$$

auch ein (offenes) Intervall $I_y \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = y_0 \in I_y$ so, dass wir eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $x\colon I_y \to \mathbb{R}$ finden, die die Gleichung

$$F(x(y), y) = F(x_0, y_0) = F(1,1) = 9$$

und damit auch die Differentialgleichung (2) mit Anfangsdaten $x(1) = 1$ eindeutig auf dem Intervall I_y löst.
In diesem Falle können wir sogar nach x auflösen z.B. nach der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} 6yx(y)^2 + 3x &= F(x(y), y) = F(1,1) = 9 \\ \Leftrightarrow\ 2yx(y)^2 + x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow\ x(y) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24y}}{4y} \end{aligned}$$

für alle $y \in I_y$. Nach der Anfangsbedigung $x(1) = 1$ folgt nun:

$$\begin{aligned} 1 = x(1) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24 \cdot 1}}{4 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \\ \Leftrightarrow\ 1 &= \frac{-1+5}{4}, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung zu der Differentialgleichung (2) mit der Anfangsbedingung $x(1) = 1$ lautet:

$$x(y) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24y}}{4y}$$

für alle $y \in I_y$. Nun können wir das maximale Intervall I_y wählen als

$$I_y = (0, \infty).$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung (2) zum Anfangswert $x(1) = 1$ gegeben durch

$$x(y) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24y}}{4y} \text{ für alle } y \in (0, \infty).$$

(3) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 2x\mathrm{e}^y - 1 \text{ und } Q(x,y) = x^2\mathrm{e}^y + 1$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) = 2x\mathrm{e}^y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = 2x\mathrm{e}^y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Das Gebiet $\mathbb{R}^2$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend, also erfüllt die Differentialgleichung (3) die Integrabilitätsbedingungen und ist somit exakt. D.h. es existiert eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist.

Schritt 2. Bestimmung der Stammfunktion F: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl der ersten Komponente:

$$F(x,y) = \int P(z,y)\mathrm{d}z = \int (2z\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}z = x^2\mathrm{e}^y - x + C(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} & x^2\mathrm{e}^y + 1 = Q(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x,y) = x^2\mathrm{e}^y + C'(y) \\ \Leftrightarrow\ & C'(y) = 1, \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h.

$$C(y) = \int 1\mathrm{d}z = y + C$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 0$, und erhalten dadurch $C(y) = y$ für $y \in \mathbb{R}$. Damit haben wir die Stammfunktion

$$F(x,y) = x^2\mathrm{e}^y - x + y \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (3): Es gilt:

$$P(x_0,y_0) = P(1,0) = 2 \cdot 1\mathrm{e}^0 - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F(x_0,y_0) = F(1,0) = 1^2 \cdot \mathrm{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_y \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 = y_0 \in I_y$ so, dass die Gleichung

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) = F(1,0) = 0$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $x\colon I_y \to \mathbb{R}$ mit $x(0) = 1$ hat. Diese Lösung x ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3).

Schritt 4. Nach x auflösen??: Es gilt für alle $y \in I_y$ nach z.B. der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} & x(y)^2\mathrm{e}^y - x(y) + y = F(x(y),y) = F(1,0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(y) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y\mathrm{e}^y}}{2\mathrm{e}^y}. \end{aligned}$$

Wegen der Anfangswertbedingung $x(0) = 1$ gilt nun:

$$\begin{aligned} & 1 = x(0) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0\mathrm{e}^0}}{2\mathrm{e}^0} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{1 \pm 1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 1 = \frac{1+1}{2}, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung zu dem Anfangswertproblem (3) lautet:

$$x(y) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y\mathrm{e}^y}}{2\mathrm{e}^y}.$$

Wähle das eindeutige $z_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$1 = 4z_0\mathrm{e}^{z_0},$$

dann ist die Lösung zu (3):

$$x(y) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y\mathrm{e}^y}}{2\mathrm{e}^y} \text{ für alle } y \in (-\infty, z_0].$$

□

Bemerkung zu z_0: Der Wert z_0 ist in etwa $\frac{1}{5}$.
Bemerkung zur Auflösbarkeit nach y: Wir finden wegen

$$Q(1,0) = 1^2 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

auch ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = x_0 \in I_x$ so, dass wir eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ finden, die die Gleichung

$$F(x, y(x)) = F(x_0, y_0) = F(1,0) = 0$$

und damit auch die Differentialgleichung (3) mit Anfangsdaten $y(1) = 0$ eindeutig auf dem Intervall I_x löst. Allerdings können wir in diesem Falle nicht nach y auflösen wie zuvor nach x.