09.11.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

2. Tutoriumsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Zum Separationsansatz)

Lösen Sie erst die folgenden Differentialgleichungen allgemein mithilfe eines Separationsansatzes und anschließend das dazugehörende Anfangswertproblem.

(1) $y' = \frac{xe^{2x}}{y\cos(y)}$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

(2) $y \cdot (1-x) \cdot y' = 1 - y^2$.

(3) $y' = \frac{1}{\cos^2(2x)\cos^2(y)}$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.
Hinweis: Es gilt $\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$.

Lösung von Aufgabe 1

(1) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = x\mathrm{e}^{2x} \text{ und } g(y) = \frac{1}{y\cos(y)}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ und $y \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so können wir die Differentialgleichung (1) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{g(y)} = y\cos(y).$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \int y\cos(y)\mathrm{d}y \\ &= y\sin(y) - \int 1 \cdot \sin(y)\mathrm{d}y \\ &= y\sin(y) + \cos(y)\end{aligned}$$

nach partieller Integration und

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x + C &= \int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x + C \\ &= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x + C \\ &= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C \\ &= \frac{1}{4}(2x-1)\mathrm{e}^{2x} + C\end{aligned}$$

nach partieller Integration für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$y(x)\sin(y(x)) + \cos(y(x)) = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C = \frac{1}{4}(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + C.$$

Dies können wir nicht praktikabel nach y (und auch nicht nach x) auflösen, also ist $y(x)$ implizit gegeben durch die Gleichung

$$y(x)\sin(y(x)) + \cos(y(x)) = \frac{1}{4}(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + C.$$

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{\pi}{4}$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}(2\cdot 0 - 1)\,\mathrm{e}^{2\cdot 0} + C = -\frac{1}{4} + C \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\pi + 4 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} = C, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung $y(x)$ zum Anfangswertproblem (1) ist durch die Gleichung

$$y(x)\sin(y(x)) + \cos(y(x)) = \frac{1}{4}(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{\pi + 4 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

implizit gegeben. □

(2) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ und } g(y) = \frac{1-y^2}{y}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 1$ und $y \neq 0$, so können wir die Differentialgleichung (2) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ durch Partialbruchzerlegung (kurz: PBZ)

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(y)} &= \frac{y}{1-y^2} = \frac{y}{(1-y)(1+y)} = \frac{(1+y)-1}{(1-y)(1+y)} \\ &= \frac{1}{1-y} - \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right] \\ &= \frac{1}{2(1-y)} - \frac{1}{2(1+y)}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \int \left[\frac{1}{2(1-y)} - \frac{1}{2(1+y)}\right]\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2}\log(|1-y|) - \frac{1}{2}\log(|1+y|) \end{aligned}$$

und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x + C = -\log(|1-x|) + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und $y \notin \{-1, 1\}$.
Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\log(|1-y(x)|) - \frac{1}{2}\log(|1+y(x)|) = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C = -\log(|1-x|) + C \\ \Leftrightarrow\quad & \log(|1-y(x)|) + \log(|1+y(x)|) = 2\log(|1-x|) - 2C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ \left|1-y(x)^2\right| = |1-y(x)|\cdot|1+y(x)| &= \mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2\\ \Leftrightarrow\ \pm\left(1-y(x)^2\right) &= \mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2\\ \Leftrightarrow\ \mp y(x)^2 &= \mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2 \mp 1\\ \Leftrightarrow\ y(x)^2 &= \mp\mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2 \pm 1\\ \Leftrightarrow y(x) &= \pm\sqrt{\mp\mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2 \pm 1}.\end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (2)

$$y(x) = \pm\sqrt{\mp\mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2 \pm 1}.$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Demnach haben wir je nachdem in welchem Fall wir im Radikal sind eine Ellipsengleichung oder eine Hyperpelgleichung, das sehen wir besser anhand der Umstellung zu

$$\pm 1 = \mathrm{e}^{-2C}\left(1-x\right)^2 \pm y(x)^2.$$

$\square$

(3) Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
Schritt 1. Trennung der Variablen: Setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(2x)} \text{ und } g(y) = \frac{1}{\cos^2(y)}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \frac{2k+1}{4}\pi$ und $y \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, so können wir die Differentialgleichung (3) schreiben als

$$y' = f(x)g(y),$$

also ist

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu lösen.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{g(y)} = \cos^2(y).$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \int \cos^2(y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int \cos^2(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int \cos(y)\cos(y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int \cos^2(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\sin(y)\cos(y) + \frac{1}{2}\int \sin^2(y)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\sin^2(y)+\cos^2(y)\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\sin(y)\cos(y)\\ &= \frac{1}{2}\int 1\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\sin(y)\cos(y)\\ &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin(y)\cos(y)\\ &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) = \frac{1}{4}\left(\sin(2y)+2y\right)\end{aligned}$$

laut partieller Integration und dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R},$$

sowie dem Additionstheorem

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int \frac{1}{\cos^2(2x)}\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\tan(2x) + C$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $y \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(\sin(2y)+2y\right) = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\tan(2x) + C \\ \Leftrightarrow\ \sin(2y)+2y = 2\tan(2x)+4C. \end{aligned}$$

Demnach ist die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung (3) implizit gegeben durch

$$\sin(2y(x)) + 2y(x) = 2\tan(2x) + 4C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ oder explizit (nach x aufgelöst):

$$x(y) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin(2y)+2y}{2} - 2C\right)$$

für alle $y \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned} 0 = \sin(2\cdot 0) + 2\cdot 0 = 2\tan\left(\frac{2\pi}{8}\right) + 4C = 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4C = 2 + 4C \\ \Leftrightarrow\ 4C = -2 \\ \Leftrightarrow\ C = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (3) ist implizit gegeben durch:

$$\sin(2y(x)) + 2y(x) = 2\tan(2x) - 2$$

oder explizit (aufgelöst nach x):

$$x(y) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin(2y)+2y}{2} + 1\right)$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. $\square$

Bemerkung zum Merken bestimmter Sinus/ Cosinus-Werte: Dies geht anhand der folgenden Tabelle ganz gut:

Grad α	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$
Bogenmaß x	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(x)$	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$

Aufgabe 2 (Zum Eulerschen Multiplikator)

Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen nicht-exakt sind und finden Sie dann einen passenden Eulerschen Multiplikator η. Lösen Sie anschließend die Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem. Beachten Sie dabei die jeweiligen Hinweise.

(1) $\left(\sin(x) - x\cos(x) - 3x^2\left(y-x\right)^2\right)\mathrm{d}x + 3x^2\left(y-x\right)^2\mathrm{d}y = 0.$
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von x abhängt.

(2) $\left(xy^2 + y\right)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0.$
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von y abhängt.

(3) $\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{8y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 0.$
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von der Summe x^2+y^2 abhängt.

Lösung von Aufgabe 2

(1) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = \sin(x) - x\cos(x) - 3x^2\left(y-x\right)^2 \ \text{ und } Q(x,y) = 3x^2(y-x)^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x, y) &= -6x^2(y-x), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x, y) &= 6x(y-x)^2 - 6x^2(y-x)
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
-6x^2(y-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x, y) &= 6x(y-x)^2 - 6x^2(y-x) \\
\Leftrightarrow \ 0 &= 6x(y-x)^2 \\
\Leftrightarrow \ x &= 0 \text{ oder } y = x
\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x \text{ oder } x = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x, y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (1) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(x)$ finden, d.h. $\varphi(x, y) = x$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \varphi(x, y) = 1 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \varphi(x, y) = 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x, y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x, y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \varphi(x, y) \cdot P(x, y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \varphi(x, y) \cdot Q(x, y)} &= \frac{6x(y-x)^2 - 6x^2(y-x) - \left(-6x^2(y-x)\right)}{0 \cdot (\sin(x) - x\cos(x) - 3x^2(y-x)^2) + 1 \cdot (3x^2(y-x)^2)} \\
&= \frac{6x(y-x)^2}{-3x^2(y-x)^2} \\
&= -\frac{2}{x} = h(x) = h\left(\varphi(x, y)\right)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(\tau) \mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\int -\frac{2}{\tau} \mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-2\log(|z|)} = \frac{1}{z^2}.$$

Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x, y)\right) = \frac{1}{x^2} \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf der linken und der rechten Halbebene

$$\widetilde{P}(x, y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x, y)\mathrm{d}y = 0 \quad (1')$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x, y) &= \mu(x) P(x, y) \\
&= \frac{1}{x^2} \left(\sin(x) - x\cos(x) - 3x^2(y-x)^2\right) \\
&= \frac{1}{x^2} \sin(x) - \frac{1}{x} \cos(x) - 3(y-x)^2, \\
\widetilde{Q}(x, y) &= \mu(x) Q(x, y) \\
&= \frac{1}{x^2} \left(3x^2(y-x)^2\right) \\
&= 3(y-x)^2
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F} \colon (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \widetilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x, y) \\ \widetilde{Q}(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}$$

ist.

Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die y-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{Q}$) bzgl. der zweiten Komponente:

$$F(x,y) = \int \widetilde{Q}(x,z)\mathrm{d}z = \int 3(z-x)^2\mathrm{d}z = (y-x)^3 + C(x)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\sin(x) - \frac{1}{x}\cos(x) - 3(y-x)^2 = \widetilde{Q}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{F}(x,y) = -3(y-x)^2 + C'(x)\\ \Leftrightarrow\ C'(x) = \frac{1}{x^2}\sin(x) - \frac{1}{x}\cos(x).\end{aligned}$$

Damit gilt für C:

$$\begin{aligned}C(x) &= \int C'(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2}\sin(x) - \frac{1}{x}\cos(x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^n\left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!}\right)x^{2n-1}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(1-(2n+1)\right)x^{2n-1}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\int \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!}x^{2n-1}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int 2nx^{2n-1}\mathrm{d}x\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} + C\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} + 1 + C\\
&= -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 1 + C\\
&= -\frac{\sin(x)}{x} + 1 + C,\end{aligned}$$

wählen wir noch o.B.d.A. $C = -1$ erhalten wir für $C(\cdot)$:

$$C(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $C(0) = -1$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = (y-x)^3 - \frac{\sin(x)}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $\widetilde{F}(0,y) = y^3 - 1$.

Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1'): Nun finden wir für alle Paare $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{Q}\,(x_0,y_0) \neq 0$ ein offenes Intervall $I_x \in \mathbb{R}$mit $x_0 \in I_x$ so, dass wir eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ finden mit

$$(y(x)-x)^3 - \frac{\sin(x)}{x} = \widetilde{F}(x,y(x)) = \widetilde{F}\,(x_0,y_0) \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (1') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (1).
Allgemein existiert eine stetig-differenzierbare Lösung y auf einem Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1) bzw. (1'), wenn

$$\widetilde{F}\,(x,y(x)) = C$$

gilt für alle $x \in I_x$.
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können durch Umstellen von

$$(y(x)-x)^3 - \frac{\sin(x)}{x} = \widetilde{F}(x_0, y_0)$$

nach $y(x)$ auflösen, dadurch ergibt sich

$$y(x) = x + \sqrt[3]{F(x_0, y_0) + \frac{\sin(x)}{x}}$$

als Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(2) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = xy^2 + y \text{ und } Q(x,y) = -x$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) = 2xy + 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = -1$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 2xy + 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = -1 \\ \Leftrightarrow\ 0 &= 2(xy+1) \\ \Leftrightarrow\ xy &= -1 \\ \Leftrightarrow\ y &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = -\frac{1}{x} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (2) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(y)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = y$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = 0 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = 1.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)} &= \frac{-1 - (2xy+1)}{1 \cdot (xy^2 + y) - 0 \cdot (-x)} \\ &= \frac{-2(xy+1)}{y(xy+1)} \\ &= -\frac{2}{y} = h(y) = h(\varphi(x,y)) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\int -\frac{2}{\tau}\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-2\log(|z|)} = \frac{1}{z^2}$$

Damit gilt nun:

$$\eta = \eta(\varphi(x,y)) = \frac{1}{y^2} \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf der oberen und der unteren Halbebene

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (2')$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x,y) &= \mu(x)P(x,y) \\
&= \frac{1}{y^2}\left(xy^2+y\right) \\
&= x + \frac{1}{y}, \\
\widetilde{Q}(x,y) &= \mu(x)Q(x,y) \\
&= -\frac{x}{y^2}
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F}\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x,y) \\ \widetilde{Q}(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int \widetilde{P}(z,y)\mathrm{d}z = \int \left(z + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} + C(y)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}
-\frac{x}{y^2} &= \widetilde{Q}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x,y) \\
&= -\frac{x}{y^2} + C'(y) \Leftrightarrow\ C'(y) = 0,
\end{aligned}$$

d.h. die Funktion C ist konstant. O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (2'): Für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ und $\widetilde{Q}\left(x_0,y_0\right) \neq 0$ existiert ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ gibt, die

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y(x)} = F(x,y(x)) = F\left(x_0,y_0\right)$$

löst für alle $x \in I_x$. Die Funktion y löst auch die Differentialgleichung (2') auf I_x und wegen $\eta \neq 0$ löst y auch die Differentialgleichung (2) auf I_x.
Allgemein existiert eine stetig-differenzierbare Lösung y auf einem Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (2) bzw. (2'), wenn

$$\widetilde{F}\left(x,y(x)\right) = C$$

gilt für alle $x \in I_x$.
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y(x)} = F(x,y(x)) = F\left(x_0,y_0\right)$$

explizit nach $y(x)$ auflösen. Es ergibt sich durch Umbestellen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y(x)} = F\left(x_0,y_0\right) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{x}{y(x)} = F\left(x_0,y_0\right) - \frac{1}{2}x^2 \\
\Leftrightarrow\ &y(x) = \frac{x}{F\left(x_0,y_0\right) - \frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x_0, y_0) - \frac{1}{2}x^2 \neq 0.$$

□

(3) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \text{ und } Q(x,y) = \frac{8y}{1+x^2+y^2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2},\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= \frac{-16xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = \frac{-16xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\\ \Leftrightarrow\ x = 0 &\text{ oder } y = 0\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (3) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta\left(x^2+y^2\right)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = x^2+y^2$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = 2x \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = 2y.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)} &= \frac{\frac{-16xy}{(1+x^2+y^2)^2} - \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}}{\frac{4xy}{1+x^2+y^2} - \frac{16xy}{1+x^2+y^2}}\\ &= \frac{-12xy\left(1+x^2+y^2\right)}{-12xy\left(1+x^2+y^2\right)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2+y^2}\\ &= h\left(x^2+y^2\right) = h\left(\varphi(x,y)\right)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{1+\tau}\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{\log(|1+z|)} = |1+z|.$$

Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right) = \left|1+x^2+y^2\right| = 1+x^2+y^2 \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf $\mathbb{R}^2$:

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (3')$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x,y) &= \mu\left(x^2+y^2\right)P(x,y)\\ &= 2x\\ \widetilde{Q}(x,y) &= \mu\left(x^2+y^2\right)Q(x,y)\\ &= 8y\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x,y) \\ \widetilde{Q}(x,y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \widetilde{P}(z,y)\mathrm{d}z = \int 2z\mathrm{d}z \\ &= x^2 + C(y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$8y = \widetilde{Q}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x,y) = C'(y)$$

d.h. für die Funktion C gilt nun

$$C(y) = \int 8z\mathrm{d}z = 4y^2 + C$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 0$, also lautet nun die Funktion

$$C(y) = 4y^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = x^2 + 4y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (3'): Wegen

$$\widetilde{Q}\left(x_0, y_0\right) = \widetilde{Q}\left(1,0\right) = 0$$

können wir erstmal keine (eindeutige) Lösung garantieren, allerdings haben wir noch: Wir können die Differentialgleichung (3') lösen, genau dann, wenn wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 = x_0 \in I_x$ finden so, dass wir die Gleichung

$$x^2 + 4y(x)^2 = \widetilde{F}(x,y) = \widetilde{F}(1,0) = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2 + 0^2} = 1$$

auf I_x lösen können, dies ist aber gerade wegen

$$x^2 + \left(2y(x)\right)^2 = 1$$

eine Ellipsengleichung, also lösbar.
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$x^2 + \left(2y(x)\right)^2 = 1$$

durch Umstellung explizit nach $y(x)$ auflösen, dies ergibt dann

$$\begin{aligned} y(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right) \\ \Leftrightarrow \;\; y(x) &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in [-1,1]$. Wegen $y(1) = 0$ sind beide Lösungen zulässig, d.h. die Lösung ist in diesem Falle nicht eindeutig. □

Aufgabe 3 (Zum Reduktionsverfahren von d'Alembert)

Zeigen Sie, dass die jeweilige Funktion y_1 stets eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist. Bestimmen Sie erst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und danach die spezielle zum dazugehörigen Anfangswertproblem. Machen Sie dafür den Ansatz $y_2(x) := y_1(x)v(x)$.

(1) $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, ist eine Lösung von (1).

(2) $xy'' + (1-x)y' + y = 0.$
Hinweis 1.: Die Funktion $y_1(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, ist eine Lösung von (2).
Hinweis 2.: Das Integral $\int \frac{\mathrm{e}^s}{s(s-1)^2}\mathrm{d}s$ ist nicht elementar-berechenbar, d.h. einfach in der Lösung so stehen lassen.

Lösung von Aufgabe 3

(1) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (1): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}, \\ y_1''(x) &= \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$y_1''(x) + 2y_1'(x) + y_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = 0,$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (1).
Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \mathrm{e}^{-x}v(x), \\ y_2'(x) &= -v(x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}v'(x), \\ y_2''(x) &= \mathrm{e}^{-x}v(x) - \mathrm{e}^{-x}v'(x) - \mathrm{e}^{-x}v'(x) + \mathrm{e}^{-x}v''(x) = \mathrm{e}^{-x}v(x) - 2\mathrm{e}^{-x}v'(x) + \mathrm{e}^{-x}v''(x). \end{aligned}$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (1), daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= y_2''(x) + 2y_2'(x) + y_2(x) \\ &= \left(\mathrm{e}^{-x}v(x) - 2\mathrm{e}^{-x}v'(x) + \mathrm{e}^{-x}v''(x)\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-x}v'(x) - \mathrm{e}^{-x}v(x)\right) + \mathrm{e}^{-x}v(x) \\ &= v(x)\left[\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\right] + v'(x)\left[-2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right] + \mathrm{e}^{-x}v''(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x}v''(x) \\ \Leftrightarrow\ & v''(x) = 0. \end{aligned}$$

Schritt 3. Berechnung von v', v bzw. y_2: Es gilt:

$$v'(x) = \int v''(z)\mathrm{d}z = \int 0\mathrm{d}z = C$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$, und daher ist

$$v(x) = \int v'(z)\mathrm{d}z = \int C\mathrm{d}z = Cx$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = Cx\mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 1$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = x\mathrm{e}^{-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (1): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) erhalten wir also

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x} = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Aufstellen der speziellen Lösung y zum Anfangswertproblem (1): Es gilt für die Ableitung von y:

$$y'(x) = C_2\mathrm{e}^{-x} - (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-x} = ((C_2 - C_1) - C_2x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen den Anfangswertbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ muss nun gelten:

$$1 = y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0)\,\mathrm{e}^{-0} = C_1$$

$$
\begin{aligned}
0 = y'(0) &= ((C_2 - C_1) - C_2 \cdot 0)\,\mathrm{e}^{-0} = C_2 - C_1 \\
\Leftrightarrow\ C_2 &= C_1 = 1.
\end{aligned}
$$

Also ergibt sich als Lösung für unser Anfangswertproblem (1):

$$
y(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bemerkung: Wir werden auch relativ bald sehen wie wir solche Differentialgleichungen wie in (1) von Hand selber lösen können, siehe Differentialgleichungen $n$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(2) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (2): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= 1, \\
y_1''(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$
xy_1''(x) + (1-x)y_1'(x) + y_1(x) = x \cdot 0 + (1-x) \cdot 1 + (x-1) = 0,
$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (2).

Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= (x-1)v(x), \\
y_2'(x) &= v(x) + (x-1)v'(x), \\
y_2''(x) &= v'(x) + v'(x) + (x-1)v''(x) = 2v'(x) + (x-1)v''(x).
\end{aligned}
$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (2), daher gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= x \cdot y_2''(x) + (1-x)y_2' + y_2(x) \\
&= x\left[2v'(x) + (x-1)v''(x)\right] + (1-x)\left[v(x) + (x-1)v'(x)\right] + (x-1)v(x) \\
&= v(x)\left[(1-x) + (x-1)\right] + v'(x)\left[2x + (1-x)(x-1)\right] + x(x-1)v''(x) \\
&= x(x-1)v''(x) + \left[2x + (1-x)(x-1)\right]v'(x) \\
\Leftrightarrow\ v''(x) &= -\frac{2x + (1-x)(x-1)}{x(x-1)}v'(x).
\end{aligned}
$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$
u'(x) = v''(x) = -\frac{2x + (1-x)(x-1)}{x(x-1)}v'(x) = -\left[\frac{2}{x-1} + \frac{1-x}{x}\right]u(x) = -\left[\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} - 1\right]u(x). \quad (2')
$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung (2'): Die Lösung lautet:

$$
u(x) = C\mathrm{e}^{\int -\left[\frac{2}{z-1} + \frac{1}{z} - 1\right]\mathrm{d}z} = C\mathrm{e}^{-2\log(|x-1|) - \log(|x|) + x} = \frac{C\mathrm{e}^{x}}{|x|(x-1)^2}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2: Es gilt:

$$
v(x) = \int^x v'(z)\mathrm{d}z = \int^x u(z)\mathrm{d}z = C\int^x \frac{\mathrm{e}^z}{|z|(z-1)^2}\mathrm{d}z
$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Nun haben wir

$$
y_2(x) = y_1(x)v(x) = C(x-1)\int^x \frac{\mathrm{e}^z}{|z|(z-1)^2}\mathrm{d}z
$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 1$ und erhalten so als Lösung:

$$
y_2(x) = (x-1)\int^x \frac{\mathrm{e}^z}{|z|(z-1)^2}\mathrm{d}z \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.
$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (2): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) erhalten wir also

$$
y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1(x-1) + C_2(x-1)\int^x \frac{\mathrm{e}^z}{|z|(z-1)^2}\mathrm{d}z
$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$