20.11.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

# Höhere Mathematik III für Physik

## 3. Tutoriumsblatt - Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1 (Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme.

(1) $y'' + y = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

(2) $y'' + 4y = \sin^2(x)$ mit $y(\pi) = \frac{1+\pi}{8}$ und $y'(\pi) = 0$.

(3) $y''' - y'' + y' - y = 2e^x$.

**Lösung von Aufgabe 1**

(1) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}).$$

Es handelt sich jeweils um einfache (komplexe) Nullstellen.
**Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1)**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1):

$$y_h(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung**: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x)\sin(x) + C_2(x)\cos(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung von der Übung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) &= 0 \\ C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir so direkt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} C_2'(x).$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= C_1'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) \\ &= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} C_2'(x)\cos(x) - C_2'(x)\sin(x) \\ &= -C_2'(x)\left(\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + \sin(x)\right) \\ &= -C_2'(x)\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$

$$= -C_2'(x)\frac{1}{\sin(x)}$$
$$\Leftrightarrow\ C_2'(x) = -\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = -\tan^2(x)$$

damit folgt
$$C_1'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}C_2'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Damit gilt nach partieller Integration im Falle von $C_2'(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\log\left(|\cos(x)|\right),\\
C_2(x) &= -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = -\int \sin(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \int \cos(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x\\
&= -\tan(x) + \int 1\mathrm{d}x = -\tan(x) + x.
\end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung von (1):

$$y_p(x) = -\log\left(|\cos(x)|\right)\sin(x) + (x - \tan(x))\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{z\in\mathbb{R}\colon z = \frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
**Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (1)**: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\log\left(|\cos(x)|\right)\sin(x) + (x - \tan(x))\cos(x) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{z\in\mathbb{R}\colon z = \frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □
(2) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2\mathrm{i})(\lambda - 2\mathrm{i})$$

Es handelt sich jeweils um einfache (komplexe) Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2)**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2):
$$y_h(x) = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung**: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2) machen wir den Ansatz
$$y_p(x) = C_1(x)\sin(2x) + C_2(x)\cos(2x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\sin(2x) + C_2'(x)\cos(2x) &= 0\\
2C_1'(x)\cos(2x) - 2C_2'(x)\sin(2x) &= \sin^2(x).
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir so direkt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}C_2'(x).$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= 2C_1'(x)\cos(2x) - 2C_2'(x)\sin(2x)\\
&= -2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}C_2'(x)\cos(2x) - 2C_2'(x)\sin(2x)\\
&= -2C_2'(x)\left(\frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} - \sin(2x)\right)\\
&= -2C_2'(x)\frac{\cos^2(2x) + \sin^2(2x)}{\sin(2x)}
\end{aligned}$$

$$= -2C_2'(x)\frac{1}{\sin(2x)}$$

$$\Leftrightarrow\ C_2'(x) = -\frac{1}{2}\sin^2(x)\sin(2x) = -\sin^3(x)\cos(x)$$

laut dem Additionstheorem, damit folgt

$$C_1'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}C_2'(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \sin^4(x).$$

Um nun $C_1$ und $C_2$ zu berechnen, betrachten wir erstmal die unbestimmten Integrale

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x \text{ und } \int \sin^4(x)\mathrm{d}x$$

an. Es gilt laut nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin^2(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int \cos^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin^2(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x, \\
\int \sin^4(x)\mathrm{d}x &= \int \sin^2(x)\cdot\sin^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \int \sin^2(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \sin^2(x)\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\cos(x)\cdot\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)\cos(x) - \frac{1}{3}\int \sin^4(x)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\quad \int \sin^4(x)\mathrm{d}x &= \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

Dann erhalten wir für $C_1(\cdot)$ und $C_2(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int\left(\frac{1}{2}\sin^2(x) - \sin^4(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(x)\cos(x) - \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x) \\
&= \frac{1}{8}\sin(x)\cos(x) - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x), \\
C_2(x) &= -\int \sin^3(x)\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\sin^4(x).
\end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung zu (2):

$$y_p(x) = \frac{1}{8}\sin(x)\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{8}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin^4(x)\cos(2x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2)**: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) lautet

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{8}\sin(x)\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{8}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin^4(x)\cos(2x) + C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen zu (2)**: Wir haben für die Ableitung

$$\begin{aligned}
y'(x) = &-\frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos^2(x)\sin(2x) - \frac{1}{2}\sin^2(x)\sin(2x) \\
&+ \sin(x)\cos(x)\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin^2(x)\cos^2(x)\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin^4(x)\sin(2x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sin^3(x)\cos(x)\cos(2x)-\sin^3(x)\cos(x)\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin^4(x)\sin(2x)\\
&+2C_1\cos(2x)-2C_2\sin(2x)
\end{aligned}
$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann erhalten wir aus den beiden Anfangswertbedingungen $y(\pi)=\frac{1+\pi}{8}$ und $y'(\pi)=0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\pi}{8}&=y(0)=C_2\\
0&=y'(0)\\
&\qquad=-\frac{1}{4}\pi+2C_1\\
\Leftrightarrow\ C_1&=\frac{1}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Lösung zum Anfangswertproblem (2):

$$
y(x)=\frac{1}{8}\sin(x)\cos(x)\sin(2x)-\frac{1}{8}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x)\sin(2x)-\frac{1}{4}\sin^4(x)\cos(2x)+\frac{1}{8}\pi\sin(2x)+\frac{1+\pi}{8}\cos(2x)
$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. $\square$

(3) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$
p(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)\left(\lambda^2+1\right)=(\lambda-1)(\lambda-\mathrm{i})(\lambda+\mathrm{i}).
$$

Es handelt sich jeweils um einfache (komplexe) Nullstellen.

**Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3)**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3):

$$
y_h(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\sin(x)+C_3\cos(x)
$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$.

**Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung**: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3) machen wir den Ansatz

$$
y_p(x)=C_1(x)\mathrm{e}^x+C_2(x)\sin(x)+C_3(x)\cos(x)
$$

mit Funktionen $C_1(\cdot),C_2(\cdot),C_3(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung von der Übung liefert das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\sin(x)+C_3'(x)\cos(x)&=0,\\
C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\cos(x)-C_3'(x)\sin(x)&=0,\\
C_1'(x)\mathrm{e}^x-C_2'(x)\sin(x)-C_3'(x)\cos(x)&=2\mathrm{e}^x.
\end{aligned}
$$

Aus der Addition der ersten Gleichung mit der dritten erhalten wir so direkt

$$
C_1'(x)\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\ \Leftrightarrow\ C_1'(x)=2.
$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$
\begin{aligned}
0&=C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\cos(x)-C_3'(x)\sin(x)\\
&=2\mathrm{e}^x+C_2'(x)\cos(x)-C_3'(x)\sin(x)\\
\Leftrightarrow\ C_3'(x)&=\frac{2\mathrm{e}^x+C_2'(x)\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}
$$

damit folgt durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$
\begin{aligned}
0&=C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\sin(x)+C_3'(x)\cos(x)\\
&=2\mathrm{e}^x+C_2'(x)\sin(x)+\frac{2\mathrm{e}^x+C_2'(x)\cos(x)}{\sin(x)}\cos(x)\\
&=2\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}+C_2'(x)\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin(x)}\\
&=2\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}+C_2'(x)\frac{1}{\sin(x)}\\
\Leftrightarrow\ C_2'(x)&=-2\mathrm{e}^x\sin(x)-2\mathrm{e}^x\cos(x).
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$C_3'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x + C_2'(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x \sin(x)\cos(x) - 2\mathrm{e}^x \cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{2\mathrm{e}^x \sin^2(x) - 2\mathrm{e}^x \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = 2\mathrm{e}^x \sin(x) - 2\mathrm{e}^x \cos(x).$$

Wir betrachten zuerst die unbestimmten Integrale

$$\int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x \text{ und } \int \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \int \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x) - \int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \quad \int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right), \\
\int \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \left(\cos(x) + \sin(x)\right).
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int 2\mathrm{d}x = 2x, \\
C_2(x) &= -2 \int \left(\mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{e}^x \left(\sin(x) - \cos(x) + \cos(x) + \sin(x)\right) \\
&= -2\mathrm{e}^x \sin(x), \\
C_3(x) &= 2 \int \left(\mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{e}^x \left(\sin(x) - \cos(x) - \cos(x) - \sin(x)\right) \\
&= -2\mathrm{e}^x \cos(x)
\end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung von (3):

$$y_p(x) = -2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x \sin^2(x) - 2\mathrm{e}^x \cos^2(x) = -2\mathrm{e}^x (x+1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (3)**: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) lautet

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -2\mathrm{e}^x (x+1) + C_1\mathrm{e}^x + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. □

## Aufgabe 2 (Eulersche Differentialgleichung)

Lösen Sie die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen auf $(0, \infty)$.

(1) $y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0.$

(2) $xy''' + 2y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0.$

(3) $x^2y'' + 5xy' + 4y = x^2 + 16\log^2(x).$

**Lösung von Aufgabe 2**

(1) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene

Eulersche Differentialgleichung.
**Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + 5\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 5y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) + 5v'(t) + 5v(t) \\ &= v''(t) + 4v'(t) + 5v(t). \qquad (1') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda - (-2 + \mathrm{i}))(\lambda - (-2 - \mathrm{i})),$$

da z.b. nach der Mitternachtsformel gilt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = -2 \pm \mathrm{i}.$$

Es handelt sich jeweils um zwei einfache Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1')**: Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1'):

$$v_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} \sin(t) + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \cos(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Rücksubstitution**: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v(\log(x)) = C_1 \mathrm{e}^{-2\log(x)} \sin(\log(x)) + C_2 \mathrm{e}^{-2\log(x)} \cos(\log(x)) = C_1 \frac{\sin(\log(x))}{x^2} + +C_2 \frac{\cos(\log(x))}{x^2}$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □
(2) Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
**Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v'''(t) &= v''(t) + 2\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) + 2\left(v''(t) - v'(t)\right) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = 3v''(t) - 2v'(t) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (2):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) + 2\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) - \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \left(v'''(t) - 3v''(t) + 2v'(t)\right) + 2\left(v''(t) - v'(t)\right) - v'(t) + v(t) \\ &= v'''(t) - v''(t) - v'(t) + v(t). \qquad (2') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 1\right) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1).$$

Nun ist $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle und $\lambda = -1$ eine einfache Nullstelle. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2')**: Da es sich um einfache Nullstellen bzw. doppelte Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (12):

$$v_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^t + C_3 t \mathrm{e}^t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Rücksubstitution**: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v(\log(x)) = C_1 \mathrm{e}^{-\log(x)} + C_2 \mathrm{e}^{\log(x)} + C_3 \log(x) \mathrm{e}^{\log(x)} = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x + C_3 x \log(x)$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

(3) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung.

**Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y(\mathrm{e}^t)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (3):

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2t} + 16t^2 = \mathrm{e}^{2t} + 16\log^2\left(\mathrm{e}^t\right) &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + 5\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 4y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) + 5v'(t) + 4v(t) \\ &= v''(t) + 4v'(t) + 4v(t). \quad (3') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

wegen z.B. der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = -2.$$

Es handelt sich um eine doppelte Nullstellen. **Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3')**: Da es sich um eine doppelte Nullstelle handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3'):

$$v_h(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2 t\mathrm{e}^{-2t} = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung**: Motiviert durch die homogene Lösung der Differentialgleichung zu (3') machen wir den Ansatz

$$v_p(t) = C_1(t)\mathrm{e}^{-2t} + C_2(t)t\mathrm{e}^{-2t}.$$

Aus der Vorüberlegung von Aufgabe 1 auf diesem Übungsblatt bekommen wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} + C_2'(t)t\mathrm{e}^{-2t} &= 0 \\ -2C_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} + C_2'(t)(1 - 2t)\mathrm{e}^{-2t} &= \mathrm{e}^{2t} + 16t^2. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung umgeformt liefert

$$C_1'(t) = -tC_2'(t);$$

dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2t} + 16t^2 &= -2C_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} + C_2'(t)(1 - 2t)\mathrm{e}^{-2t} \\ &= C_2'(t)\left(2t + 1 - 2t\right)\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \mathrm{e}^{-2t} C_2'(t) \\ \Leftrightarrow\ C_2'(t) &= \mathrm{e}^{4t} + 16t^2\mathrm{e}^{2t}, \end{aligned}$$

d.h.

$$C_1'(t) = -tC_2'(t) = -t\mathrm{e}^{4t} - 16t^3\mathrm{e}^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zuerst die unbestimmten Integrale

$$\int \mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t,\ \int t\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t,\ \int t^2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \text{ und } \int t^2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}, \\ \int t\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{4t} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}\left(t - \frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int t^2 \mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} t^2 \mathrm{e}^{2t} - \int t\mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} t^2 \mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} t^2 \mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4} \mathrm{e}^{2t} \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2t} \left( t^2 - t + \frac{1}{2} \right), \\
\int t^3 \mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} t^3 \mathrm{e}^{2t} - \frac{3}{2} \int t^2 \mathrm{e}^{2t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} t^3 \mathrm{e}^{2t} - \frac{3}{4} \mathrm{e}^{2t} \left( t^2 - t + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \mathrm{e}^{2t} \left( 2t^3 - 3t^2 + 3t - \frac{3}{2} \right).
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
C_1(t) &= \int \left( -t\mathrm{e}^{4t} - 16t^3 \mathrm{e}^{2t} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4} \mathrm{e}^{4t} \left( t - \frac{1}{4} \right) - 4\mathrm{e}^{2t} \left( 2t^3 - 3t^2 + 3t - \frac{3}{2} \right), \\
C_2(t) &= \int \left( \mathrm{e}^{4t} + 16t^2 \mathrm{e}^{2t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4} \mathrm{e}^{4t} + 8\mathrm{e}^{2t} \left( t^2 - t + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}
$$

So ergibt sich die partikuläre Lösung zu (3'):

$$
\begin{aligned}
v_p(t) &= C_1(t)\mathrm{e}^{-2t} + C_2(t)t\mathrm{e}^{-2t} \\
&= -\frac{1}{4} \mathrm{e}^{2t} \left( t - \frac{1}{4} \right) - 4 \left( 2t^3 - 3t^2 + 3t - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{4} t\mathrm{e}^{2t} + 8t \left( t^2 - t + \frac{1}{2} \right) \\
&= -\frac{1}{16} \mathrm{e}^{2t} + 4t^2 - 8t + 6
\end{aligned}
$$

für $t \in \mathbb{R}$.

**Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (3')**: Für die allgemeine Lösung zu (3') gilt nun:

$$
v(t) = v_p(t) + v_h(t) \qquad = -\frac{1}{16} \mathrm{e}^{2t} + 4t^2 - 8t + 6 + (C_1 + C_2 t)\, \mathrm{e}^{-2t}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

**Schritt 5. Rücksubstitution**: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
y(x) = v\left(\log(x)\right) &= -\frac{1}{16} \mathrm{e}^{2\log(x)} + 4\log(x)^2 - 8\log(x) + 6 + (C_1 + C_2 \log(x))\, \mathrm{e}^{-2\log(x)} \\
&= -\frac{1}{16} x^2 + 4\log^2(x) - 8\log(x) + 6 + \frac{1}{x^2} \left( C_1 + C_2 \log(x) \right)
\end{aligned}
$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

## Aufgabe 3 (Potenzreihenansatz)

Machen Sie bei den folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertproblemen den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$.

(1) (Airysche Differentialgleichung) $y'' - xy = 0$.

(2) $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' = 2$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.

**Lösung von Aufgabe 3**

(1) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

**Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen**: Alle Koeffizienten sind selber Potenzreihen/ Polynome und haben daher Konvergenzradius unendlich, also wird unsere Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe gegeben sein.
**Schritt 2. Ansatz einsetzen**: Es gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) - xy(x) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - c_{n-1} x^n\right] \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - c_{n-1}\right] x^n \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Koeffizientenvergleich**: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1) c_{n+2} - c_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad c_{n+2} &= \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \\ c_2 &= 0, \end{aligned}$$

d.h. $c_0$ legt alle Koeffizienten mit ungeradem Index fest, sowie $c_1$ alle Koeffizienten mit geradem Index (außer Index 2) festlegt. Also erhalten wir so als Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } c_2 = 0.$$

$\square$

(2) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

**Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen**: Die Differentialgleichung (2) ist äquivalent zu

$$y'' - \frac{x}{1-x^2} y' = \frac{2}{1-x^2}.$$

Wir können die Koeffizienten jeweils in eine Potenzreihe per geometrische Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{1-x^2} &= -\frac{x}{(1-x)(1+x)} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n - 1\right)x^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \\
\frac{2}{1-x^2} &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2\right)^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}
\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. unser Potenzreihenansatz funktioniert sicherlich für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
**Schritt 2. Ansatz einsetzen**: Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
2 &= \left(1-x^2\right)y''(x) - xy'(x) \\
&= \left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - n^2 c_n\right]x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
**Schritt 3. Koeffizientenvergleich**: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned}
&(n+2)(n+1)c_{n+2} - n^2 c_n = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & c_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}c_n, \\
& c_2 = 1
\end{aligned}$$

d.h. $c_0$ legt alle Koeffizienten mit geradem Index fest (außer den Index 2), sowie $c_1$ alle Koeffizienten mit ungeradem Index festlegt. Also erhalten wir so als Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ mit

$$c_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } c_2 = 1.$$

□