

# Höhere Mathematik III für Physik

## 5. Tutoriumsblatt - Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1 (Homogene Anfangswertprobleme)

Lösen Sie erst die folgenden Differentialgleichungssysteme allgemein und anschließend das jeweils dazugehörige Anfangswertproblem.

(1)

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Lösung von Aufgabe 1

(1) Es handelt sich um ein homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen:** Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3 + \lambda)(1 + \lambda) - 1 - 2 + (3 + \lambda) - \lambda - 2(1 + \lambda) \\ &= -\lambda(3 + \lambda)(1 + \lambda) - 2(1 + \lambda) \\ &= -(1 + \lambda)(\lambda(3 + \lambda) + 2) \\ &= -(1 + \lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) \\ &= -(1 + \lambda)^2(2 + \lambda), \end{aligned}$$

z.B. laut der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}.$$

Also hat  $p$  eine einfache Nullstelle bei  $\lambda = -2$  und eine doppelte in  $\lambda = -1$ .

**Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen:** Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \ker(A - (-2) \cdot I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_{-1} &= \ker(A - 3 \cdot I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Hier benötigen wir noch zusätzlich den ersten Hauptraum zu  $-1$ , denn da stimmen die geometrische und die algebraische Vielfachheit nicht überein.

Es gilt dafür:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
H_{-1} &= \ker(A - (-1)I_3)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

**Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung:** Die ersten zwei Fundamentallösungen lauten

$$t \mapsto e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Fundamentallösung berechnet sich durch:

$$\begin{aligned}
\Phi_3(t) &= e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^1}{1!} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Damit lautet die homogene Lösung

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und Konstanten  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 4. Spezielle Lösung:** Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies liefert direkt  $C_1 = C_3 = 0$  und  $C_2 = 1$ . Damit lautet die spezielle Lösung von (1)

$$y(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

□

(2) Es handelt sich um ein homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen:** Es gilt nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 + 4] \end{aligned}$$

Also hat  $p$  drei einfache Nullstelle bei  $\lambda = 1$  und  $\lambda = 1 \pm 2i$ .

**Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen:** Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker(A - 1 \cdot I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{1-2i} &= \ker(A - (1-2i) \cdot I_3) = \ker \ker \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 2i \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \\ \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

**Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung:** Die erste Fundamentallösungen lautet

$$t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die zweite und dritte Fundamentallösung berechnet sich durch Real bzw. Imaginärteil von dem folgenden:

$$\begin{aligned} \Phi_{2,3}(t) &= e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e^t e^{-2it} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e^t (\cos(2t) - i \sin(2t)) \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) + i \cos(2t) \\ -\cos(2t) + i \sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^t \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \right] \\
&= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

laut Eulerformel bzw. der Formel von de Moivre. Damit lautet die homogene Lösung

$$y_h(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und Konstanten  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 4. Spezielle Lösung:** Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies liefert direkt  $C_1 = C_3 = 0$  und  $C_2 = -1$ . Damit lautet die spezielle Lösung von (2)

$$y(t) = -e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . □

## Aufgabe 2 (Inhomogene Anfangswertprobleme)

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Anfangswertprobleme

(1)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zuvor auch jeweils die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen bzw. inhomogenen Differentialgleichungssystems an.

### Lösung von Aufgabe 2

(1) Es handelt sich um ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen:** Es gilt:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (1 - \lambda)^2 + 1.
\end{aligned}$$

Also hat  $p$  zwei einfache Nullstellen bei  $\lambda = 1 \pm i$ .

**Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen:** Es gilt für den Eigenraum:

$$\begin{aligned}
E_{1-i} &= \ker(A - (1-i) \cdot I_2) = \ker \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

**Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung:** Die beiden Fundamentallösungen ergeben sich durch Real- und Imaginärteil von

$$\begin{aligned}
 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} &= e^t e^{-it} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= e^t (\cos(-t) + i \sin(-t)) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= e^t (\cos(t) - i \sin(t)) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= e^t \begin{pmatrix} \sin(t) + i \cos(t) \\ -\cos(t) + i \sin(t) \end{pmatrix} \\
 &= e^t \left( \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

laut der Eulerformel. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach

$$y_h(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 5. Partikuläre Lösung aufstellen/ Variation der Konstanten:** Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$y_p(t) = C_1(t) e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_2(t) e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned}
 C_1(t) e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_2(t) e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow C'(t) = (C'_1(t), C'_2(t), C'_3(t)) &= e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Lösen wir dies (Inverse Matrix berechnen und mit dem Vektor multiplizieren), dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}, \\
 C'(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\
 &= e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin^2(t) - \cos^2(t) \\ -\sin(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t) \end{pmatrix} \\
 &= e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, C'_1(t) &= -e^{-t}, \\
 C'_2(t) &= 0,
 \end{aligned}$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras, d.h.

$$\begin{aligned}
 C_1(t) &= e^{-t}, \\
 C_2(t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Also ist die partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 5. Allgemeine Lösung:** Es gilt:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_p(t) + y_h(t) \\
 &= \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_1 e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 6. Spezielle Lösung:** Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so sehen wir direkt, dass  $C_1 = \frac{3}{2}$  und  $C_2 = \frac{1}{2}$  gelten muss. Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} - \frac{3}{2}e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) - 3\sin(t) \\ 3\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . □

(2) Es handelt sich um ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen:** Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 3), \end{aligned}$$

z.B. laut Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (-24)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}.$$

Also hat  $p$  zwei einfache Nullstellen bei  $\lambda = -2$  und bei  $\lambda = 3$ .

**Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen:** Es gilt für den Eigenraum:

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \ker(A - (-2) \cdot I_2) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_3 &= \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

**Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung:** Die beiden Fundamentallösungen lauten nun

$$\Phi_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 5. Partikuläre Lösung aufstellen/ Variation der Konstanten:** Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$y_p(t) = C_1(t) e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned} C_1(t)e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(t)e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow C'(t) = (C'_1(t), C'_2(t)) &= e^{2t} \begin{pmatrix} 2 & e^{-5t} \\ -3 & e^{5t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 2 & e^{-5t} \\ -3 & e^{5t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösen wir dies (Inverse Matrix berechnen und mit dem Vektor multiplizieren), dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & e^{-5t} \\ -3 & e^{5t} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2e^{5t} + 3e^{5t}} \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{5t} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5e^{5t}} \begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{5t} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} C'(t) &= \frac{e^{-4t}}{5} \begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{5t} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-4t}}{5} \begin{pmatrix} -e^{5t} \\ 2 \end{pmatrix} C'_1(t) &= -\frac{e^t}{5}, \\ C'_2(t) &= \frac{2}{5}e^{-4t}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{e^t}{5}, \\ C_2(t) &= -\frac{e^{-4t}}{10}. \end{aligned}$$

Also ist die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\frac{e^{-t}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{e^{-t}}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{e^{-t}}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 5. Allgemeine Lösung:** Es gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + y_h(t) \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 6. Spezielle Lösung:** Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= y(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2 - (-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h.  $C_1 = \frac{1}{5}$  und  $C_2 = \frac{11}{10}$ . Die Lösung lautet:

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-2t}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{11}{10} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

□

### Aufgabe 3 (Matrixexponentialfunktion)

Bestimmen Sie jeweils die Matrixexponentialfunktion  $e^{tA}$  für die Matrizen

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe dazu das entsprechende im Skript, es wurde so nicht in der Übung behandelt.

### Lösung von Aufgabe 3

(1) Das Vorgehen ist im Grunde wie beim Lösen der homogenen Gleichung in Aufgabe 1.

**Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen:** Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 5 = (3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2) + 5 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 8 = (2 + 2i - \lambda)(2 - 2i - \lambda), \end{aligned}$$

z.B. laut der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i.$$

Also hat  $p$  zwei einfache Nullstelle bei  $\lambda = 2 \pm 2i$ .

**Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen:** Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_{2-2i} &= \ker(A - (2 - 2i) \cdot I_2) &&= \ker \begin{pmatrix} -1 + 2i & 5 \\ -1 & 1 + 2i \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 5 & -5(1 + 2i) \\ -1 & 1 + 2i \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -(1 + 2i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

**Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung/ Aufstellen der Fundamentalmatrix:** Die beiden Fundamentallösungen ergeben sich durch Real- und Imaginärteil bilden von

$$\begin{aligned} e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} &= e^{2t} e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} (\cos(-2t) + i \sin(-2t)) \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} (\cos(2t) - i \sin(2t)) \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2 \sin(2t) + 2i \cos(2t) - i \sin(2t) \\ \cos(2t) - i \sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \left( \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2 \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) - \sin(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2 \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + i e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) - \sin(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



d.h. die Fundamentalmatrix lautet:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(2t) + 2\sin(2t)) & e^{2t}(2\cos(2t) - \sin(2t)) \\ e^{2t}\cos(2t) & e^{2t} - \sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix}, \\ \Phi(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi(0)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Schritt 4. Matrixexponentialfunktion aufstellen:** Es gilt laut Vorlesung:

$$\begin{aligned}e^{tA} &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \frac{e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) & 2\cos(2t) + 4\sin(2t) - 2\cos(2t) + \sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) & 5\sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sin(2t)}{2} \right]\end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . □

(2) Hier können wir durch geschickte Zerlegung direkt mit der Definition arbeiten.

**Schritt 1. Zerlegung der Matrix A:** Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =: I_3 + B.$$

**Schritt 2. Vertauschbarkeit prüfen:** Nun ist weiter:

$$I_3 B = B = B I_3.$$

Also erhalten wir laut Vorlesung:

$$e^{tA} = e^{t(I_3+B)} = e^{tI_3} e^{tB}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 3. Einzelne Exponentialmatrizen ausrechnen:** Für  $e^{tI_3}$  gilt per Definition:

$$\begin{aligned}e^{tI_3} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tI_3)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i I_3^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} I_3 \\ &= e^t I_3\end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Zur Berechnung von  $e^{tB}$  berechnen wir:

$$\begin{aligned}B^0 &= I_3, \\ B^1 &= B, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq 3}.\end{aligned}$$

So ergibt sich per Definition

$$\begin{aligned}
 e^{tB} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tB)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i B^i}{i!} = \sum_{i=0}^2 \frac{t^i}{i!} B^i \\
 &= \frac{t^0}{0!} B^0 + \frac{t^1}{1!} B^1 + \frac{t^2}{2!} B^2 = I_3 + tB + \frac{t^2}{2} B^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 \\ 3t & 2t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2 + 3t & 2t & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**Schritt 4.  $e^{tA}$  bestimmen:** Es ergibt sich per Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= e^{tI_3} e^{tB} \\
 &= e^t I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2 + 3t & 2t & 1 \end{pmatrix} \\
 &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2 + 3t & 2t & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 2te^t & e^t & 0 \\ 2t^2 e^t + 3te^t & 2te^t & e^t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

□