

Höhere Mathematik III für Physik

6. Tutoriumsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (Inhomogene Transportgleichung)

Lösen Sie das folgende inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{cases} 2\partial_t u(t, x) + 3\partial_x u(t, x) = 2 \sin(t)e^{-\cos(t)} \\ u(0, x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases} .$$

Lösung von Aufgabe 1

Schritt 1. Setting aufstellen: Die partielle Differentialgleichung ist äquivalent zu der folgenden Gleichung:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{3}{2}\partial_x u(t, x) = \sin(t)e^{-\cos(t)}, \\ u(0, x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases}$$

Es handelt sich um eine lineare (inhomogene) Transportgleichung. In diesem Fall lautet:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2}, \\ f(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ g(t, x) &= \sin(t)e^{-\cos(t)} \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist stetig differenzierbar auf \mathbb{R} und die Funktion g ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sowie insbesondere stetig partiell differenzierbar nach x .

Schritt 2. Lösungsformel anwenden: Es muss also für die Lösung u gelten:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x - at) + \int_0^t g(r, x - a(t - r))dr \\ &= e^{-\frac{(x - \frac{3}{2}t)^2}{2}} + \int_0^t \sin(r)e^{-\cos(r)}dr \\ &= e^{-\frac{(x - \frac{3}{2}t)^2}{2}} + \left[e^{-\cos(r)} \right]_0^t \\ &= e^{-\frac{(x - \frac{3}{2}t)^2}{2}} + e^{-\cos(t)} - e^{\cos(0)} \\ &= e^{-\frac{(x - \frac{3}{2}t)^2}{2}} + e^{-\cos(t)} - e^{-1} \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (Charakteristiken-Verfahren)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mithilfe eines Charakteristiken-Verfahren:

(1)

$$\begin{cases} (2y - 3x)\partial_x u(x, y) - y\partial_y u(x, y) = y^2(2y - 5x), \\ u(x, 1) = x + 1. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

wobei die Funktion $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq -1, \\ -x & \text{für } -1 < x \leq 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 2

(1) **Schritt 1. Setting aufstellen:** Setzen wir

$$\begin{aligned} a(x, y, u) &= \begin{pmatrix} 2y - 3x \\ -y \end{pmatrix}, \\ b(x, y, u) &= y^2 (2y - 5x), \\ f(x) &= x + 1. \end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(x, y, u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u(x, y) = b(x, y, u) \\ u(x, 1) = f(x) \end{cases}.$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k :

$$k(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u \right) (k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u \right) \\ a(k(s), w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u \right) &= b(k(s), w(s)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} &= k'(s) = a(k(s), w(s)) = \begin{pmatrix} 2y(s) - 3x(s) \\ -y(s) \end{pmatrix}, \\ w'(s) &= b(k(s), w(s)) = y^2(s) (2y(s) - 5x(s)), \\ k(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ w(0) &= u(k(0)) = u(x_0, 1) = x_0 + 1. \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:

Lösung für k : Es handelt sich bei x wie bei y um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:

Lösung der homogenen Gleichung für $y(\cdot)$:

$$y(s) = C_2 e^{-s},$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstante $C_2 \in \mathbb{R}$. So erhalten wir für $x(\cdot)$:

$$x'(s) = 2y(s) - 3x(s) = -3x(s) + 2C_2 e^{-s}.$$

Lösung der homogenen Gleichung für $x(\cdot)$: Diese lautet

$$x_h(s) = C_1 e^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ für eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$.

Variation der Konstanten/ Partikuläre Lösung: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$x_p(s) = C(s)e^{-3s}.$$

So gilt für die Ableitung

$$x'_p(s) = C'(s)e^{-3s} - 3C(s)e^{-3s} = C'(s)e^{-3s} - 3x_p(s).$$

Demnach gilt eingesetzt in die inhomogene Gleichung:

$$\begin{aligned} C'(s)e^{-3s} - 3x_p(s) &= x'_p(s) = -3x_p(s) + 2C_2e^{-s} \\ \Leftrightarrow C'(s)e^{-3s} &= 2C_2e^{-s} \\ \Leftrightarrow C'(s) &= 2C_2e^{2s}. \end{aligned}$$

Also muss für $C(\cdot)$ gelten:

$$C(s) = \int 2C_2e^{2s} ds = C_2e^{2s}.$$

Dies bedeutet für die partikuläre Lösung

$$x_p(s) = C(s)e^{-3s} = C_2e^{-s}.$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lösung für $x(\cdot)$: Die allgemeine Lösung für $x(\cdot)$ ist damit

$$x(s) = x_p(s) + x_h(s) = C_2e^{-s} + C_1e^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.

Spezielle Lösung für $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$: Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = k_2(0) = 1$ erhalten wir:

$$C_2 = C_2e^{-0} = y(0) = 1.$$

Damit gilt:

$$y(s) = e^{-s} \text{ und } x(s) = e^{-s} + C_1e^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = k_1(0) = x_0$ folgt so:

$$x_0 = x(0) = e^{-0} + C_1e^{-3 \cdot 0} = 1 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = x_0 - 1,$$

und damit lautet $x(\cdot)$:

$$x(s) = e^{-s} + (x_0 - 1)e^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. **Lösung für w :** Einsetzen in die Differentialgleichung von w von $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ liefert:

$$\begin{aligned} w'(s) &= y^2(s) (2y(s) - 5x(s)) = e^{-2s} (2e^{-s} - 5(e^{-s} + (x_0 - 1)e^{-3s})) \\ &= e^{-2s} (-3e^{-s} - 5(x_0 - 1)e^{-3s}) \\ &= -3e^{-3s} - 5(x_0 - 1)e^{-5s}. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung für w :

$$w(s) = \int (-3e^{-3s} - 5(x_0 - 1)e^{-5s}) ds = e^{-3s} + (x_0 - 1)e^{-5s} + C_3$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $C_3 \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung $w(0) = x_0 + 1$ muss

$$x_0 + 1 = w(0) = e^{-3 \cdot 0} + (x_0 - 1)e^{-5 \cdot 0} + C_3 = 1 + (x_0 - 1) + C_3 = x_0 + C_3 \Leftrightarrow C_3 = 1$$

gelten. Damit ist

$$w(s) = e^{-3s} + (x_0 - 1)e^{-5s} + 1$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Nach s, x_0 auflösen und Einsetzen: Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x(s) &= e^{-s} + (x_0 - 1)e^{-3s} \\ \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{-3s} &= x(s) - e^{-s} \\ \Leftrightarrow x_0 - 1 &= x(s)e^{3s} - e^{2s} \\ \Leftrightarrow x_0 &= x(s)e^{3s} - e^{2s} + 1. \end{aligned}$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned}
 u(x(s), y(s)) = u(k(s)) = w(s) &= e^{-3s} + (x_0 - 1)e^{-5s} + 1 \\
 &= e^{-3s} + (x(s)e^{3s} - e^{2s})e^{-5s} + 1 \\
 &= e^{-3s} + x(s)e^{-2s} - e^{-3s} + 1 \\
 &= x(s)e^{-2s} + 1 \\
 &= x(s)y^2(s) + 1
 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung lautet

$$u(x, y) = xy^2 + 1$$

für alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

□(2) **Schritt 1. Setting aufstellen:** Setzen wir

$$\begin{aligned}
 a(t, x, u) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u(t, x) \end{pmatrix}, \\
 b(t, x, u) &= 0, \\
 f(x) &= u_0(x).
 \end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(t, x, u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u(t, x) = b(t, x, u) \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k :

$$k(s) = \begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u \right) (k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u \right) \\
 a(k(s), w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u \right) &= b(k(s), w(s)).
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} t'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} &= k'(s) = a(k(s), w(s)) = \begin{pmatrix} 1 \\ w(s) \end{pmatrix}, \\
 w'(s) &= b(k(s), w(s)) = 0, \\
 k(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\
 w(0) &= u(k(0)) = u(x_0, 1) = u_0(x_0).
 \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:

Lösung für k : Es handelt sich bei t wie bei w um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:

$$\begin{aligned}
 t(s) &= s + C_1, \\
 w(s) &= C_3
 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_3 \in \mathbb{R}$. So erhalten wir für $x(\cdot)$:

$$x'(s) = w(s) = C_3.$$

Dies lässt sich Lösen durch

$$x(s) = C_3s + C_2$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $C_2 \in \mathbb{R}$.

Spezielle Lösung für $t(\cdot), x(\cdot)$ und $w(\cdot)$: Wegen $w(0) = u_0(x_0)$ folgt:

$$u_0(x_0) = w(0) = C_3,$$

d.h.

$$w(s) = u_0(x_0)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Für $t(\cdot)$ folgt:

$$0 = t(0) = 0 + C_1 = C_1,$$

d.h.

$$t(s) = s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Als letztes gilt nun wegen $x(0) = x_0$:

$$x_0 = x(0) = u_0(x_0) \cdot 0 + C_2 = C_2,$$

d.h.

$$x(s) = u_0(x_0) s + x_0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Nach s, x_0 auflösen und Einsetzen: Es gilt:

$$s = t(s)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir je nachdem in welchem Fall wir sind.

Fall 1. $x_0 \leq 1$: Es gilt:

$$\begin{aligned} x(s) &= u_0(x_0) s + x_0 = s + x_0 \\ \Leftrightarrow x_0 &= x(s) - s = x(s) - t(s). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$u(t(s), x(s)) = u(k(s)) = w(s) = u_0(x_0) = 1 = u_0(x_0) = u_0(x(s) - t(s)) = 1.$$

Fall 2. $-1 < x_0 \leq 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned} x(s) &= u_0(x_0) s + x_0 = -x_0 s + x_0 = (1 - s)x_0 = (1 - t(s))x_0 \\ \Leftrightarrow x_0 &= \frac{x(s)}{1 - t(s)}. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} u(t(s), x(s)) &= u(k(s)) = w(s) = u_0(x_0) = -x_0 \\ &= -\frac{x(s)}{1 - t(s)} = \frac{x(s)}{t(s) - 1}. \end{aligned}$$

Fall 3. $x_0 > 0$: Es gilt:

$$x(s) = u_0(x_0) s + x_0 = x_0.$$

Einsetzen liefert

$$u(t(s), x(s)) = u(k(s)) = w(s) = u_0(x_0) = 0 = u_0(x(s)) = 0.$$

Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung lautet

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \begin{cases} 1, & \text{für } x - t \leq -1 \\ \frac{x}{t-1}, & \text{für } (t-1) < x \leq 0 \\ 0, & \text{für } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq t - 1 \\ \frac{x}{t-1}, & \text{für } (t-1) < x \leq 0 \\ 0, & \text{für } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

für alle Paare $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

□

Aufgabe 3 (Radialsymmetrische Lösungen)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ von der Partiellen Differentialgleichung

$$x \cdot \nabla u(x) + \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} u(x) + \|x\| u^2(x) = 0,$$

wobei mit $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ die euklidische Norm gemeint ist, d.h.

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Lösung von Aufgabe 3

Schritt 1. Radialsymmetrische Bedingung: Sei u eine Lösung so, dass es eine Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = g(\|x\|) \text{ für alle } x.$$

Schritt 2. Ableitungen berechnen: Seien $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} r(x) &= \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}, \\ \partial_{x_i} u(x) &= g'(\|x\|) \cdot \partial_{x_i} r(x) = \frac{x_i g'(\|x\|)}{\|x\|}, \\ \nabla u(x) &= \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x. \end{aligned}$$

Schritt 3. Einsetzen in die Partielle Differentialgleichung: Wir erhalten durch Schritt 2. für alle x :

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot \nabla u(x) + \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} u(x) + \|x\| u^2(x) \\ &= x \cdot \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x + \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} g(\|x\|) + \|x\| g^2(\|x\|) \\ &= \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} \|x\|^2 + \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} g(\|x\|) + \|x\| g^2(\|x\|) \\ &= \|x\| g'(\|x\|) + \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} g(\|x\|) + \|x\| g^2(\|x\|) \\ \Leftrightarrow 0 &= g'(\|x\|) + \frac{1}{1 + \|x\|} g(\|x\|) + g^2(\|x\|) \\ &= g'(r(x)) + \frac{1}{1 + r(x)} g(r(x)) + g^2(r(x)). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung auf $[0, \infty)$

$$g' + \frac{1}{1+r} g + g^2 = 0.$$

Schritt 4. Lösen der Gewöhnlichen Differentialgleichung: Es handelt sich um eine homogene Riccati-Differentialgleichung.

Substitution und Umformen: Wir setzen $h := g^{1-2} = g^{-1}$, so gilt:

$$h' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Dies liefert uns durch Umstellen der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} g' + \frac{1}{1+r} g + g^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{g'}{g^2} - \frac{1}{1+r} \frac{1}{g} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow h' - \frac{1}{1+r} h - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Für h haben wir so eine lineare inhomogene Differentialgleichung auf $[0, \infty)$ erhalten.

Lösung der homogene Gleichung: Die damit verbundene Lösung der homogenen Gleichung ist auf $[0, \infty)$

$$h_h(r) = Ce^{\int \frac{1}{1+r} dr} = Ce^{\log(1+r)} = C(1+r).$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. **Partikuläre Lösung:** Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$h_p(r) = C(r)(1+r).$$

Abgeleitet erhalten wir

$$h_p'(r) = C'(r)(1+r) + C(r).$$

Eingesetzt in die inhomogene Gleichung folgt nun:

$$\begin{aligned} 0 &= h_p' - \frac{1}{1+r}h_p - 1 \\ &= C'(r)(1+r) + C(r) - \frac{C(r)(1+r)}{1+r} - 1 = C'(r)(1+r) + C(r) - C(r) - 1 = C'(r)(1+r) - 1 \\ \Leftrightarrow C'(r) &= \frac{1}{1+r}. \end{aligned}$$

Also ist

$$C(r) = \int \frac{1}{1+r} dr = \log(1+r).$$

Damit lautet die partikuläre Lösung nun

$$h_p(r) = C(r)(1+r) = (1+r)\log(1+r)$$

für alle $r \in [0, \infty)$.

Allgemein Lösung h : Die allgemeine Lösung für h lautet:

$$h(r) = h_p(r) + h_h(r) = (1+r)\log(1+r) + C(1+r)$$

für alle $r \in [0, \infty)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Rücksubstitution: Es gilt:

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{h(r)} \\ &= \frac{1}{(1+r)\log(1+r) + C(1+r)} \\ &= \frac{1}{(1+r)[\log(1+r) + C]} \end{aligned}$$

für alle

$$r \in [0, \infty) \setminus \{r \in [0, \infty) : \log(1+r) = -C\}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Schritt 5. Radialsymmetrische Lösungen: Damit folgt für die radialsymmetrischen Lösungen u :

$$u(x) = g(\|x\|) = \frac{1}{(1+\|x\|)[\log(1+\|x\|) + C]}$$

für alle

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \log(1+\|x\|) = -C\}$$

und Konstante $C \in \mathbb{R}$. □

Hinweise:

- Die schriftliche Klausur findet am Dienstag, den 26.02.2019 von 13.00 bis 15.00 Uhr statt.
- Der Anmeldeschluss für die Klausur ist Sonntag, der 10.02.2019, man kann sich online im Campus System anmelden.
- Meldet Euch bitte rechtzeitig an, und überprüft ein paar Tage später, ob eure Anmeldung tatsächlich eingetragen ist im Campus System.
- Abmelden (ohne irgendwelche Konsequenzen) ist jederzeit möglich. Zum einen könnt ihr Euch online bis einen Tag vor der Klausur oder direkt vor der Prüfung vor Ort bei den Aufsichtspersonen abmelden.
- Sollten Fragen zu der Vorlesung, den Übungs- und/ oder Tutoriumsblättern bestehen, so wendet Euch an Michael Ullmann (michael.ullmann@kit.edu oder im Büro 2.033/2.034).