Formelsammlung Höhere Mathematik III Physik 2019/2020

1) Lineare Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Lösung der homogenen Gleichung ($b \equiv 0$): $y_\mathrm{h} = C\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$.
Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_\mathrm{p} = C(x)y_h$. In die inhomogene DGL einsetzen und $C(x)$ bestimmen.
Allgemeine Lösung: $y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$.
Explizite Lösung für das Anfangswertproblem (AwP): $y(x) = y_0\mathrm{e}^{A(x)} + e^{A(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\mathrm{d}t$,
wobei $A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t$ ist.

2) Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen / Trennung der Variablen

$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Wir bekommen die Formel: $\int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)}\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

3a) Bernoulli Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^a = 0.$$

Nach Multiplikation mit $(1-a)\,y^{-a}$ und Substitution $z = y^{1-a}$, bekommen wir eine lineare DGL erster Ordnung bgl z. Nachdem wir die Lösung z bestimmt haben, lösen wir die originale DGL durch $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-a}}$.

3b) Riccati Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x) = k(x),$$

wobei g und h Funktionen sind. Sei φ eine (vorgegebene) Lösung, dann setzen wir $u := y - \varphi$. Das ergibt eine Bernoulli Differentialgleichung bzgl. u, diese wie in 3a) lösen.

4) Exakte Differentialgleichungen

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0, \ (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

heißt exakt, genau dann, wenn das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist.
Ist Ω einfach zusammenhängend, dann ist die Diffentialgleichung exakt, genau dann, wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ auf Ω ist. Ist F ein Potential vom Vektorfeld $\vec{v}$, dann ist die Form der Lösungen implizit gegeben durch $F(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

5) Reduktionsverfahren von d'Alembert:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x).$$

Sei y_1 eine bekannte Lösung der zugehörigen homogenen DGL und dann ist, für geeignetes v, die Funktion $y(x) = v(x)y_1(x)$ eine geeignete Lösung der DGL. Wir erhalten durch Einsetzen in die obere DGL eine lineare DGL erster Ordnung bzgl. $u(x) := v'(x)$. Die Funktion u lässt sich wie in 1) (Lineare DGL erster Ordnung) bestimmen.

6) Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

(1) *Homogener Fall* ($f \equiv 0$):

- Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, in die DGL einsetzen:

$$\Rightarrow \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0.$$

- Charakteristisches Polynom p gegeben durch:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

- Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von p bestimmen.
- λ ist k-fache reelle Nullstelle ($k \in \mathbb{N}$):

$$\varphi^{(\lambda)}(x) = \left(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{k-1}x^{k-1}\right) \mathrm{e}^{\lambda x} = \sum_{l=0}^{k-1} C_l x^l \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

- $\lambda = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist k-fache echt komplexe Nullstelle ($k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$\begin{aligned}\varphi^{(\lambda)}(x) &= \left(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{k-1}x^{k-1}\right) \mathrm{e}^{ax} \sin(bx) + \left(D_0 + D_1 x + \ldots + D_{k-1}x^{k-1}\right) \mathrm{e}^{ax} \cos(bx) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} C_l x^l \mathrm{e}^{ax} \sin(bx) + \sum_{l=0}^{k-1} D_l x^l \mathrm{e}^{ax} \cos(bx).\end{aligned}$$

- Lösung der homogenen Gleichung: $y_{\mathrm{h}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(\lambda_i)}(x)$.

(2) *Inhomogener Fall*: Ist die Inhomogenität f von der Form

$$f(x) = q(x)e^{\sigma x}\sin(\omega x) \text{ oder } f(x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x),$$

wobei q ein Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ sind.

- *Fall 1.* $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ keine Nullstelle von p:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = r_1(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + r_2(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x),$$

  wobei r_1, r_2 zwei Polynome vom Grad m sind.

- *Fall 2.* $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ eine k-fache Nullstelle von p:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = x^k\Big(r_1(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + r_2(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x)\Big),$$

  wobei r_1, r_2 zwei Polynome vom Grad m sind.

7) Eulersche Differentialgleichung

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \text{ auf } (0, \infty).$$

Setze $z(t) = y\left(e^t\right)$, bestimme danach die Ableitungen von z und setze dies in die DGL ein. Löse anschließend die DGL $n$ter Ordnung für z mit konstanten Koeffizienten wie in 6). Rücksubstitution zu y durch $y(x) = z\left(\ln(x)\right)$.

8) Abgewandelter Potenzreihenansatz

$$x^2y''(x) + xp(x)y' + q(x)y(x) = 0$$

so, dass ein $\rho > 0$ existiert mit

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \text{ und } q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \text{ für } |x| < \rho.$$

Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \geq r_2$ die Nullstellen von $F_0(r) := r\,(r-1) + p_0 r + q_0$. (Nur der Fall $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ wird betrachtet).

Formen der Lösungen auf $0 < |x| < \rho$: $\quad y_1(x) = |x|^{r_1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $c_0 \neq 0$.

- $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$: $\quad y_2(x) = |x|^{r_2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, $d_0 \neq 0$.
- $r_1 = r_2$: $\quad y_2(x) = y_1(x) \ln(|x|) + |x|^{r_2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x^n$.
- $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$: $\quad y_2(x) = C y_1(x) \ln(|x|) + |x|^{r_2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, wobei $d_0 \neq 0$ und $C \in \{0, 1\}$.

9) Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t),$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix ist.
(i) Lösung der homogenen Gleichung / Bestimmung eines Fundamentalsystems :

- Charakteristisches Polynom p von der Matrix A gegeben durch $p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von p bestimmen.
- Zur Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ von p den Eigenraum $E_\lambda := \ker(A - \lambda I_n) = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$, d.h. die Eigenvektoren zu λ bestimmen.
- Gibt es Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A ($A\vec{v_j} = \lambda_j \vec{v_j}$, $j = 1, ..., n$) dann bilden $\vec{\Phi}_j(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$, $j = 1, \ldots, n$ ein Fundamentalsystem.
- Wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kann das Paar der Lösungen $e^{\lambda t}\vec{v}$, $\overline{e^{\lambda t}\vec{v}}$ durch $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}\vec{v}), \operatorname{Im}(e^{\lambda t}\vec{v})$ ersetzt werden um ein reelles Fundamentalsystem zu bestimmen.
- Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p mit algebraischer Vielfachheit $m \in \mathbb{N}$ und geometrischer Vielfachheit $k \in \mathbb{N}$, d.h. $E_\lambda = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ mit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig.
  - $\vec{\Phi}_j(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\vec{v}_j, j = 1, \ldots, k$ sind k linear unabhängige Lösungen.
  - Ist $k < m$, dann erweitere die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ zu einer Basis von $\ker(A - \lambda I_n)^m$ durch $\vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_m$. Dann sind weitere Lösungen gegeben durch $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j \vec{v}_l$, $l = k+1, ..., m$.
  - Insgesamt erhalten wir so $\vec{\Phi}_1, \ldots, \vec{\Phi}_n$ als n paarweise linear unabhängige Lösungen, bzw. $\Phi(t) := \begin{pmatrix} \vec{\Phi}_1(t) & | & \ldots & | & \vec{\Phi}_n(t) \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. $\vec{\Phi}_1, \ldots, \vec{\Phi}_n$ bilden das Fundamentalsystem.

(ii) Matrixexponentialfunktion $e^{At} := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$.

Ist Φ ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, dann ist $\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_\mathrm{p}(t) = \Phi(t)\vec{c}(t)$, wobei $\vec{c}(t) = \int \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t)dt$ ist.

(iv) Lösung vom AwP $\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = Ay(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{y}\,(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$

- Mittels der Matrixexponentialfunktion: $\vec{y}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 + e^{tA}\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-rA}\vec{b}(r)\mathrm{d}r.$
- Mittels der Matrix Φ: $\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\mathrm{d}s.$

10) Lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} u_t\,(x,t) + au_x\,(x,t) &= g\,(x,t)\,, \\ u\,(x,0) &= f\,(x)\,. \end{aligned}$$

Lösungsformel: $u\,(x,t) = f\,(x - ta) + \int\limits_0^t g\big(x - a(t-r), r\big)\mathrm{d}r$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

11) Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\vec{a}\,(\vec{x}, u) \cdot \nabla u\,(\vec{x}) = b\,(\vec{x}, u) \;\text{ für } x \in D,$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a}\colon D \times J \to \mathbb{R}^n$, $b\colon D \times J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

- $s \mapsto \vec{k}(s)$ Charakteristik; $w(s) := u\left(\vec{k}(s)\right)$.
- Löse das charakteristische System:

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \vec{a}\left(\vec{k}(s), w(s)\right), \\ w'(s) &= b\left(\vec{k}(s), w(s)\right). \end{aligned}$$

Ein paar Reihendarstellungen: $\sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, für alle $z \in \mathbb{C}$.