21.10.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme lösen)

Charakterisieren Sie stets den Typ der vorliegenden Differentialgleichung und lösen Sie anschließend das zu Grunde liegende Anfangswertproblem (bzw. im Fall von Teil (4) die zu Grunde liegende Differentialgleichung) auf einem möglichst geeigneten Intervall I.

(1) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos(x)}{x^2},\ y(\pi) = 0.$

(2) $y' = \frac{x^2}{\cos(y)},\ y(0) = -\frac{\pi}{2}.$

(3) $y' + y + \frac{1}{y} = 0,\ y(0) = 4.$

(4) $y' = -y^2 + (1 - 2x)\, y + 2x.$

Lösung von Aufgabe 1

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, da wir diese umformen können zu

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos(x)}{x^2} \ \Leftrightarrow\ y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Lösung der homogenen Gleichung zu (1): Die homogene Differentialgleichung zu (1) lautet:

$$y_{\mathrm{h}} = -\frac{2}{x}y_{\mathrm{h}}.$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x = -2\log(|x|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Lösung y_{h} vom obigen Problem ist nun gegeben durch

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}z} = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-2\log(|x|)} = C_{\mathrm{h}}\,|x|^{-2} = \frac{C_{\mathrm{h}}}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung zu (1): Motiviert durch die homogene Lösung y_{h} der homogenen Differentialgleichung zu (1) machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{C(x)}{x^2}$$

für eine Funktion C und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung (1) ein. Wir haben für die Ableitung von y_{p} nach der Produktregel

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = \frac{C'(x)}{x^2} - 2\frac{C(x)}{x^3} = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2}{x}y_{\mathrm{p}}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (1):

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2}{x}y_{\mathrm{p}}(x) = y_{\mathrm{p}}'(x) = -\frac{2}{x}y(x) + \frac{\cos(x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ \frac{C'(x)}{x^2} &= \frac{\cos(x)}{x^2}\\ \Leftrightarrow\ C'(x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int\limits_0^x \cos(s)\mathrm{d}s = [\sin(s)]_0^x = \sin(x) - \sin(0) = \sin(x) - 0 = \sin(x).$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (1):

$$y_\mathrm{p}(x) = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet nun:

$$\begin{aligned}y(x) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{h}(x) &= \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{C_\mathrm{h}}{x^2}\\ &= \frac{\sin(x) + C_\mathrm{h}}{x^2}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$.
<u>Lösen des Anfangswertproblems</u>:
Schritt 4. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (1): Für die Lösung des Anfangswertproblems (1) muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$\begin{aligned}0 = y(\pi) &= \frac{\sin(\pi) + C_\mathrm{h}}{\pi^2} = \frac{0 + C_\mathrm{h}}{\pi^2} = \frac{C_\mathrm{h}}{\pi^2}\\ \Leftrightarrow\ C_\mathrm{h} &= 0.\end{aligned}$$

Damit lautet wegen $\pi \in (0, \infty)$ die Lösung vom Anfangswertproblem (1):

$$y(x) = \frac{\sin(x) + C_\mathrm{h}}{x^2} = \frac{\sin(x) + 0}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

für alle $x \in (0, \infty) =: I$. □
(2) <u>Typ der Differentialgleichung bestimmen</u>: Diese hat keinen speziellen Typ, wir können aber sagen, dass es eine nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen ist, denn wir können diese schreiben als

$$y' = \frac{x^2}{\cos(y)} = x^2 \cdot \frac{1}{\cos(y)} = f(x) \cdot g(y)$$

mit den Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \text{ und } g\colon \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{1}{\cos(y)}.$$

<u>Lösen der Differentialgleichung</u>:
Schritt 1. Trennung der Variablen: Wir haben nun

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

also muss

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gelten.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos(y)}} = \cos(y).$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int \cos(y)\mathrm{d}y = \sin(y)$$

und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int x^2\mathrm{d}x + C = \frac{x^3}{3} + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\begin{aligned}\sin(y(x)) = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C = \frac{x^3}{3} + C \\ \Leftrightarrow\ y(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x^3}{3} + C\right).\end{aligned}$$

Diese Funktion ist wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}-1 \le \frac{x^3}{3} + C \le 1 \\ \Leftrightarrow\ -(1+C) = -1 - C \le \frac{x^3}{3} \le 1 - C \\ \Leftrightarrow\ -3(1+C) \le x^3 \le 3(1-C) \\ \Leftrightarrow\ -\sqrt[3]{3(1+C)} = \sqrt[3]{-3(1+C)} \le x \le \sqrt[3]{3(1-C)}.\end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2):

$$y(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \left[-\sqrt[3]{3(1+C)}, \sqrt[3]{3(1-C)}\right]$.
Lösen des Anfangswertproblems:
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = -\frac{\pi}{2}$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} = y(0) = \sin^{-1}\left(\frac{0^3}{3} + C\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0}{3} + C\right) = \sin^{-1}(0 + C) = \sin^{-1}(C) \\ \Leftrightarrow\ C = \sin^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,\end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned}-\sqrt[3]{3(1+C)} = -\sqrt[3]{3(1+(-1))} = -\sqrt[3]{3(1-1)} = -\sqrt[3]{3\cdot 0} = -\sqrt[3]{0} = -0 = 0, \\ \sqrt[3]{3(1-C)} = \sqrt[3]{3(1-(-1))} = \sqrt[3]{3(1+1)} = \sqrt[3]{3\cdot 2} = \sqrt[3]{6},\end{aligned}$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (2) lautet:

$$y(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \sin^{-1}\left(\frac{x^3}{3} + (-1)\right) = \sin^{-1}\left(\frac{x^3}{3} - 1\right)$$

für alle $x \in \left[-\sqrt[3]{3(1+C)}, \sqrt[3]{3(1-C)}\right] = \left[0, \sqrt[3]{6}\right] =: I.$ □

(3) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Wir können die Differentialgleichung äquivalent umformen zu

$$\begin{aligned}y' + y + \frac{1}{y} = 0 \\ \Leftrightarrow\ y' = -y - \frac{1}{y} = -y - y^{-1}.\end{aligned}$$

Dies ist eine homogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = -1$.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^{1+1} = y^2.$$

Diese hat laut Kettenregel die Ableitung

$$z' = 2y \cdot y' = 2yy'.$$

Wegen der Differentialgleichung für y' folgt nun:

$$z' = 2yy' = 2y\left(-y - y^{-1}\right) = -2y^2 - 2 = -2z - 2.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$(3') \ z' = -2z - 2.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichungen (3) und (3') sind äquivalent. **Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung zu (3')**: Die homogene Differentialgleichung zu (3') lautet

$$z_\mathrm{h}(x) = -2z_\mathrm{h}(x).$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int -2\mathrm{d}x = -2x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_h vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_\mathrm{h}(x) = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{\int -2\mathrm{d}x} = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung zu (3'): Motiviert durch die Lösung z_h der homogenen Differentialgleichung zu (3') machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

für eine Funktion C und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung (3') ein. Wir haben für die Ableitung von z_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-2x} + C(x)\mathrm{e}^{-2x} \cdot (-2) = C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2 \cdot C(x)\mathrm{e}^{-2x} = C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2z_\mathrm{p}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (3'):

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2z_\mathrm{p}(x) &= z_\mathrm{p}'(x) = -2z_\mathrm{p}(x) - 2 \\ \Leftrightarrow \ C'(x)\mathrm{e}^{-2x} &= -2 \\ \Leftrightarrow \ C'(x) &= -2\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{x} -2\mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}s = \left[-\mathrm{e}^{2s}\right]_{-\infty}^{x} = -\mathrm{e}^{2x} - 0 = -\mathrm{e}^{2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (3'):

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-2x} = -\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} = -1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (3'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3') lautet nun

$$z(x) = z_\mathrm{p}(x) + z_\mathrm{h}(x) = -1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - 1$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zur Lösung der Differentialgleichung (3): Es gilt:

$$z(x) = y(x)^2 \ \Leftrightarrow \ y(x) = \pm\sqrt{z(x)}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} &C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \ &C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} \geq 1 \\ \Leftrightarrow \ &C_\mathrm{h} \geq \mathrm{e}^{2x} \\ \Leftrightarrow \ &2x \leq \log(C_\mathrm{h}) \\ \Leftrightarrow \ &x \leq \frac{\log(C_\mathrm{h})}{2}, \end{aligned}$$

d.h. in diesem Falle muss $C_{\mathrm{h}} \geq \mathrm{e}^{2x} > 0$ sein. Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) (per Rücksubstitution):

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm\sqrt{z(x)} \\ &= \pm\sqrt{C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-2x} - 1}, \end{aligned}$$

für eine Konstante $C_{\mathrm{h}} > 0$ und allen $x \in \left(-\infty, \frac{\log(C_{\mathrm{h}})}{2}\right]$.

Lösen des Anfangswertproblems:

Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (3): Für die Lösung des Anfangswertproblems (3) muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$\begin{aligned} 4 = y(0) &= \pm\sqrt{C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-2\cdot 0} - 1} = \pm\sqrt{C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{0} - 1} = \pm\sqrt{C_{\mathrm{h}} \cdot 1 - 1} = \pm\sqrt{C_{\mathrm{h}} - 1} \\ \Rightarrow\ 16 = 4^2 &= \left(\pm\sqrt{C_{\mathrm{h}} - 1}\right)^2 = C_{\mathrm{h}} - 1 \\ \Leftrightarrow\ C_{\mathrm{h}} &= 17 \end{aligned}$$

und es ist $C_{\mathrm{h}} = 17 > 1 > 0$ und damit $\log\left(C_{\mathrm{h}}\right) = \log(17) > 0$ bzw. $\frac{\log(C_{\mathrm{h}})}{2} > 0$, sowie $y(0) = 4 > 0$ ist. Damit lautet wegen $0 \in \left(-\infty, \frac{\log(17)}{2}\right)$ die Lösung vom Anfangswertproblem (3):

$$y(x) = \sqrt{C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-2x} - 1} = \sqrt{17\mathrm{e}^{-2x} - 1}$$

für alle $x \in \left(-\infty, \frac{\log(C_{\mathrm{h}})}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{\log(17)}{2}\right] =: I$. □

(4) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Dies ist eine inhomogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine inhomogene Ricatti-Differentialgleichung.

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt -1. Lösung erraten und Substitution zur homogenen Riccatti-Differentialgleichung: Wir sehen ein, dass $\widetilde{y} \equiv 1$ auf $\mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist, denn diese ist als konstante Funktion stetig-differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit der Ableitung

$$\widetilde{y}' \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

und es gilt:

$$-\widetilde{y}(x)^2 + (1-2x)\,\widetilde{y}(x) + 2x = -1^2 + (1-2x)\cdot 1 + 2x = -1 + 1 - 2x + 2x = 0 = \widetilde{y}'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also existiert eine Lösung der Differentialgleichung (4). Sei nun y die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4). Setze nun

$$u := y - \widetilde{y} = y - 1 \ \Leftrightarrow\ y = u + 1.$$

Dann gilt für die Ableitung von u:

$$u' = (y-1)' = y'.$$

Anschließendes Einsetzen in die Differentialgleichung (4) ergibt nach binomischer Formel

$$\begin{aligned} u' = y' &= -y^2 + (1-2x)\,y + 2x \\ &= -\left(u+1\right)^2 + (1-2x)\,(u+1) + 2x = -\left(u^2 + 2u + 1\right) + (1 - 2xu - 2x + u) + 2x \\ &= -u^2 - (1+2x)\,u = -(1+2x)\,u - u^2. \end{aligned}$$

Also haben wir nun eine Differentialgleichung für u erhalten:

$$(\widetilde{4})\ u' = -(1+2x)\,u - u^2.$$

Dies ist eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$ und die beiden Differentialgleichungen (4) und $(\widetilde{4})$ sind äquivalent.

Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := u^{1-n} = u^{1-2} = u^{-1} = \frac{1}{u}.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{u'}{u^2} = -u'u^2.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für u' folgt nun:

$$z' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{-(1+2x)\,u - u^2}{u^2} = -\left[-\frac{(1+2x)\,u}{u^2} - \frac{u^2}{u^2}\right] = -\left[-(1+2x)\cdot\frac{1}{u} - 1\right] = (1+2x)\,z + 1.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$(4')\ z' = (1+2x)\,z + 1.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichungen (4') und $(\widetilde{4})$ sind äquivalent.
Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung zu (4'): Die homogene Differentialgleichung zu (4') lautet

$$z_\mathrm{h}'(x) = (1+2x)\,z_\mathrm{h}(x).$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Intgral

$$\int (1+2x)\,\mathrm{d}x = x + x^2 = x\,(1+x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_h vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_\mathrm{h}(x) = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{\int(1+2x)\mathrm{d}x} = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{x(1+x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleitung der partikulären Lösung zu (4'): Motiviert durch die Lösung z_h der homogenen Differentialgleichung zu (4') machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{x(1+x)}$$

für eine Funktion C und setzen die in die inhomogene Differentialgleichung (4') ein. Wir haben für die Ableitung von z_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} + C(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} \cdot [(1+x)+x] = C'(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} + (1+2x)\cdot C(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} = C'(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} + (1+2x)\,z_\mathrm{p}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (4'):

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} + (1+2x)\,z_\mathrm{p}(x) &= z_\mathrm{p}'(x) = (1+2x)\,z_\mathrm{p}(x) + 1 \\ \Leftrightarrow\ C'(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ C'(x) &= \mathrm{e}^{-x(1+x)}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-s(1+s)}\mathrm{d}s.$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (4'):

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{x(1+x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-s(1+z)}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{x(1+x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (4'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4') lautet nun

$$z(x) = z_\mathrm{p}(x) + z_\mathrm{h}(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-s(1+s)}\mathrm{d}s\mathrm{e}^{x(1+x)} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{x(1+x)} = \left[\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-s(1+s)}\mathrm{d}s + C_\mathrm{h}\right]\mathrm{e}^{x(1+x)}$$

mit einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zu $(\widetilde{4})$: Es gilt:

$$z(x) = \frac{1}{u(x)} \ \Leftrightarrow\ z(x)u(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ u(x) = \frac{1}{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(\widetilde{4})$ (per Rücksubstitution):

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\left[\int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-s(1+s)}\mathrm{d}s + C_\mathrm{h}\right]\mathrm{e}^{x(1+x)}}$$

$$= \frac{e^{-x(1+x)}}{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds + C_h}$$

für eine Konstante $C_h \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds + C_h \neq 0.$$

Genauer existiert zu jeder Konstante $C_h \in \mathbb{R}$ höchstens eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{-s(1+s)} ds + C_h = 0.$$

Schritt 5. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (4): Die allgemeine Lösung der Dfferentialgleichung (4) lautet

$$\begin{aligned} y(x) = u(x) + 1 &= \frac{e^{-x(1+x)}}{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds + C_h} + 1 \\ &= \frac{e^{-x(1+x)} + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds + C_h}{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds + C_h} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds + C_h \neq 0.$$

□

Bemerkung: Das unbestimmte Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-s(1+s)} ds$$

ist nicht elementar-berechenbar für alle $x \in \mathbb{R}$, allerdings können wir zeigen, dass dieses stets existiert und reell ist. Weiter ist die Existenz von $x_0 \in \mathbb{R}$ nur dann gegeben, wenn die Konstante $C_h < 0$ ist.

Aufgabe 2 ((Nicht-)Exakte Differentialgleichungen)

Prüfen Sie zuerst, ob die Differentialgleichung exakt ist und geben Sie im Falle der Exaktheit die Lösung in expliziter (falls möglich) oder ansonsten in impliziter Form an.

(1) $\cos(y) + 2xy + \left(x^2 - y - x\sin(y)\right) y' = 0, \ y(0) = \sqrt{2}$.

(2) $2xy^2 \frac{dx}{dy} + 2x^2y + \sqrt{x} = 0$ für $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \ y(1) = 1$.

(3) $(12xy + 3)\, dx + 6x^2 dy = 0, \ y(1) = 1$.

Lösung von Aufgabe 2

(1) Die Differentialgleichung (1) ist äquivalent zu

$$(\cos(y) + 2xy)\, dx + \left(x^2 - y - x\sin(y)\right) dy = 0.$$

Wir setzen erstmal

$$P(x, y) = \cos(y) + 2xy, \ Q(x, y) = x^2 - y - x\sin(y) \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

und $(x_0, y_0) = \left(0, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die beiden Funktionen P und Q sind stetig-differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ mit der partiellen Ableitung

$$\frac{d}{dy} P(x, y) = -\sin(y) + 2x,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = 2x - \sin(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter ist der Raum $\mathbb{R}^2$ offensichtlich einfach zusammenhängend, also ist laut Vorlesung die Differentialgleichung (1) exakt.
Dies bedeutet, dass eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ finden so, dass

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 2. Stammfunktion F finden: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl. der ersten Komponente:

$$F(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)\mathrm{d}x = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int (\cos(y) + 2xy)\,\mathrm{d}x = x\cos(y) + x^2y + C(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} x^2 - y - x\sin(y) = Q(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x,y) = -x\sin(y) + x^2 + C'(y) \\ \Leftrightarrow\ C'(y) &= -y \\ \Leftrightarrow\ C(y) &= \int -z\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}y^2 + C \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. können wir $C = 0$ annehmen. Damit lautet die Stammfunktion F:

$$F(x,y) = x^2y + x\cos(y) - \frac{1}{2}y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1): Es gilt:

$$Q(x_0,y_0) = Q\left(0,\sqrt{2}\right) = 0^2 - \sqrt{2} - 0 \cdot \sin\left(\sqrt{2}\right) = 0 - \sqrt{2} - 0 = -\sqrt{2} \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F(x_0,y_0) = F\left(0,\sqrt{2}\right) = 0^2 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \cos\left(\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 = 0 \cdot \sqrt{2} + 0 - \frac{2}{2} = 0 - 1 = -1.$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 = x_0 \in I$ so, dass die Gleichung

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) = F\left(0,\sqrt{2}\right) = -1$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = \sqrt{2}$ hat. Diese Lösung y ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1).
Allgemein existiert eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung y auf einem Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1), wenn

$$F(x,y(x)) = C$$

gilt für alle $x \in I_x$.
Schritt 4. Nach y auflösen??: Wir müssten dazu die Gleichung

$$x^2y + x\cos(y) - \frac{1}{2}y^2 = F(x,y) = F\left(0,\sqrt{2}\right) = -1$$

nach y auflösen. Dies ist aber so einfach nicht möglich, d.h. wir können erstmal keine explizite Darstellung der Lösung y angeben, aber wir wissen, dass diese Lösung existiert und sogar eindeutig ist. □
(2) Die Differentialgleichung (2) ist äquivalent zu

$$2xy^2\mathrm{d}x + \left(2x^2y + \sqrt{x}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 2xy^2,\ Q(x,y) = 2x^2y + \sqrt{x}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die beiden Funktionen P und Q sind stetig-differenzierbar auf ganz $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) = 4xy,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) = 4xy + \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Weiter ist der Raum $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ offensichtlich einfach zusammenhängend, also ist laut Vorlesung die Differentialgleichung (2) nicht exakt.
(3) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 12xy + 3 \text{ und } Q(x,y) = 6x^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $x_0 = 1 = y_0$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die Funktionen P und Q sin stetig-differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= 12x,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= 12x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Das Gebiet $\mathbb{R}^2$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend, also erfüllt die Differentialgleichung (3) die Integrabilitätsbedingungen und ist somit exakt. Dies bedeutet, dass eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert so, dass

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist.
Schritt 2. Bestimmung der Stammfunktion F: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl der ersten Komponente:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int (12xy+3)\,\mathrm{d}x = 6x^2y + 3x + C(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}6x^2 = Q(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x,y) = 6x^2 + C'(y)\\ \Leftrightarrow\ C'(y) &= 0,\end{aligned}$$

d.h. $C(\cdot)$ ist konstant und o.B.d.A. können wir $C \equiv 0$ wählen. Damit haben wir die Stammfunktion

$$F(x,y) = 6x^2y + 3x \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (3): Es gilt:

$$Q\left(x_0,y_0\right) = Q\left(1,1\right) = 6 \cdot 1^2 = 6 \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F\left(x_0,y_0\right) = F\left(1,1\right) = 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 6 \cdot 1 + 3 = 6 + 3 = 9.$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = x_0 \in I_x$ so, dass die Gleichung

$$F(x,y) = F\left(x_0,y_0\right) = F\left(1,1\right) = 9$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 1$ hat. Diese Lösung y ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3).
Schritt 4. Nach y auflösen??: Es gilt für alle $x \in I_x$ durch Umstellen:

$$\begin{aligned}6x^2y(x) + 3x &= F\left(x,y(x)\right) = F(1,1) = 9\\ \Leftrightarrow\ 2x^2y(x) &= 3 - x\\ \Leftrightarrow\ y(x) &= \frac{3-x}{2x^2}.\end{aligned}$$

Nun können wir I_x als das maximale Intervall wählen und dieses ist $I_x = (0,\infty)$. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems (3) gegeben durch

$$y(x) = \frac{3-x}{2x^2} \text{ für alle } x \in (0,\infty).$$

□

Bemerkung zur Auflösbarkeit nach x: Wir finden wegen

$$P(1,1) = 12 \cdot 1 \cdot 1 + 3 = 12 + 3 = 15 \neq 0$$

auch ein (offenes) Intervall $I_y \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = y_0 \in I_y$ so, dass wir eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $x\colon I_y \to \mathbb{R}$ finden, die die Gleichung

$$F\left(x(y), y\right) = F\left(x_0, y_0\right) = F(1,1) = 9$$

und damit auch die Differentialgleichung (3) mit den Anfangsdaten $x(1) = 1$ eindeutig auf dem Intervall I_y löst.
In diesem Falle können wir sogar nach x auflösen z.B. nach der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} 6yx(y)^2 + 3x = F\left(x(y), y\right) = F(1,1) = 9 \\ \Leftrightarrow \; 2yx(y)^2 + x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \; x(y) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24y}}{4y} \end{aligned}$$

für alle $y \in I_y$. Nach der Anfangsbedingung $x(1) = 1$ folgt nun:

$$\begin{aligned} 1 = x(1) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24 \cdot 1}}{4 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \\ \Leftrightarrow \; 1 &= \frac{-1+5}{4}, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung zu der Differentialgleichung (3) mit der Anfangsbedingung $x(1) = 1$ lautet:

$$x(y) = \frac{-1 + \sqrt{1+24y}}{4y}$$

für alle $y \in I_y$. Nun können wir das maximale Intervall I_y wählen als

$$I_y = (0, \infty)\,.$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung (3) zum Anfangswert $x(1) = 1$ gegeben durch

$$x(y) = \frac{-1 + \sqrt{1+24y}}{4y} \text{ für alle } y \in (0, \infty)\,.$$

□