05.11.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Nicht-exakte Differentialgleichung/ Euler-Multiplikator)

Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung nicht-exakt ist und bestimmen Sie dann mit Hilfe des Hinweises einen passenden Eulerschen Multiplikator η. Lösen Sie anschließend die Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem.

$$(x+y)\,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y}\mathrm{d}y = 0,\ \ y(\mathrm{e}) = 1.$$

Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von $x \cdot y$ abhängt.

Lösung von Aufgabe 1

Wir stellen zuerst eine Vorüberlegung an. Dazu seien P und Q zwei stetig-differenzierbare Funktionen (abhängig von zwei Variablen x und y). Gegeben sei nun die Differentialgleichung:

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Für unsere Überlegung nehmen wir an, dass diese nicht-exakt ist.
Nun wollen wir einen Eulerschen Multiplikator η finden so, dass

$$\eta(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x + \eta(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

exakt ist, in dem wir uns eine gewisse Struktur φ vorgeben, genauer:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right).$$

Die Funktion φ kann dabei alles sein, nur x, y oder die Summe $x+y$, etc., der Multiplikator η hängt in dem Fall dann nur von x z.B. ab.
Wir setzen:

$$\widetilde{P}(x,y) = \eta(x,y)P(x,y) \text{ und } \widetilde{Q}(x,y) = \eta(x,y)Q(x,y).$$

Da nun die Differentialgleichung

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

exakt ist, muss gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{P}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{Q}(x,y).$$

Wir erhalten für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{P}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\eta\left(\varphi(x,y)\right)P(x,y)\right]\\ &= \eta'\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) + \eta\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{Q}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\eta\left(\varphi(x,y)\right)Q(x,y)\right]\\ &= \eta'\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y) + \eta\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y).\end{aligned}$$

Damit durch Umstellung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{P}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{Q}(x,y)$$

$$\Leftrightarrow\ \eta'\left(\varphi(x,y)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)\right]=\eta\left(\varphi(x,y)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)\right]$$
$$\Leftrightarrow\ \eta'\left(\varphi(x,y)\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)}\eta\left(\varphi(x,y)\right).$$

Wünschenswert wäre, dass es eine Funktion h gibt mit

$$h\left(\varphi(x,y)\right)=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)},$$

d.h. der Term

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)}$$

hängt nur von φ ab also z.B. nur von x oder $x+y$, denn dann haben wir

$$\eta'\left(\varphi(x,y)\right)=h\left(\varphi(x,y)\right)\eta\left(\varphi(x,y)\right).$$

Zum Lösen nach η also ($z=\varphi(x,y)$)

$$\eta'(z)=h(z)\eta(z)$$

mit Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\eta(z)=C\mathrm{e}^{\int h(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

O.B.d.A. wählen wir $C=1$, da wir nur an einem $\eta\neq 0$ interessiert sind. Damit haben wir

$$\eta\left(\varphi(x,y)\right)=\mathrm{e}^{\int^{\varphi(x,y)}h(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

Wir setzen erstmal

$$P(x,y)=x+y \text{ und } Q(x,y)=-\frac{x^2}{y}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ und weiter $x_0=\mathrm{e}$, $y_0=1$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)=1,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)=-\frac{2x}{y}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)=-\frac{2x}{y}$$
$$\Leftrightarrow\ x=-\frac{y}{2}$$

gilt, aber die Menge

$$M:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\}):x=-\frac{y}{2}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset\neq\Omega\subseteq\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)\neq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)$$

für alle $(x,y)\in\Omega\backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (A1) ist nicht-exakt.
Schritt 2. Eulerschen Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta=\eta\left(x\cdot y\right)$ finden, d.h. $\varphi(x,y)=x\cdot y$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)=y \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)=x.$$

Also gilt:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)}=\frac{-\frac{2x}{y}-1}{x\cdot(x+y)-y\cdot\left(-\frac{x^2}{y}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{2x}{y} - 1}{x^2 + xy + x^2} \\
&= \frac{-\left(2x + y\right)}{xy\left(2x + y\right)} \\
&= -\frac{1}{xy} = h\left(x \cdot y\right) = h\left(\varphi(x, y)\right)
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(z)\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{\int -\frac{1}{z}\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\log(|z|)} = \frac{1}{|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Damit gilt nun:

$$\eta\left(x \cdot y\right) = \eta\left(\varphi(x, y)\right) = \frac{1}{|x \cdot y|} \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf jedem Quadranten

$$\widetilde{P}(x, y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x, y)\mathrm{d}y = 0 \quad (A1')$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x, y) &= \eta\left(x \cdot y\right) P(x, y) \\
&= \frac{x + y}{xy} \\
\widetilde{Q}(x, y) &= \eta\left(x \cdot y\right) Q(x, y) \\
&= -\frac{x^2}{xy^2} \\
&= -\frac{x}{y^2}
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktionen $\widetilde{F}\colon \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \widetilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x, y) \\ \widetilde{Q}(x, y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x, y) \in \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int \widetilde{P}(x, y)\mathrm{d}x = \int \frac{x + y}{xy}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{y} + \log\left(|x|\right) + C(y)
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}
-\frac{x}{y^2} = \widetilde{Q}(x, y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x, y) \\
&= -\frac{x}{y^2} + C'(y) \Leftrightarrow \; C'(y) = 0
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)^2$, d.h. für die Funktion C ist konstant. O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x, y) = \frac{x}{y} + \log\left(|x|\right)$$

für alle $(x, y) \in \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (A1'): Wegen

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}\left(x_0, y_0\right) &= \widetilde{Q}\left(\mathrm{e}, 1\right) \\
&= -\frac{\mathrm{e}}{1^2} = -\mathrm{e} \neq 0
\end{aligned}$$

finden wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\mathrm{e} = x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt mit

$$\frac{x}{y(x)} + \log(|x|) = \widetilde{F}(x, y(x)) = \widetilde{F}(x_0, y_0) = \widetilde{F}(\mathrm{e}, 1) = \frac{\mathrm{e}}{1} + \log(|\mathrm{e}|) = \mathrm{e} + 1 \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (A1') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (A1).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$\frac{x}{y(x)} + \log(|x|) = \mathrm{e} + 1$$

durch Umstellung explizit nach $y(x)$ auflösen, dies ergibt dann

$$y(x) = \frac{x}{\mathrm{e} + 1 - \log(|x|)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}, 0, \mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\},$$

und $y(\mathrm{e}) = 1$. $\square$

Aufgabe 2 (Reduktionsverfahren von d'Alembert)

Gegeben Sie das folgende Anfangswertproblem

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \; y(4) = 1 = y'(4).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y_1 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{1}{x}$$

die obige Differentialgleichung löst. Bestimmen Sie danach die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung, machen Sie dazu den Ansatz

$$y_2(x) := y_1(x)v(x)$$

für $x \neq 0$. Lösen Sie anschließend das dazugehörige Anfangswertproblem.

Lösung von Aufgabe 2

Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten.
Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung (1): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ y_1''(x) &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned} 2x^2y_1''(x) + 3xy_1'(x) - y_1(x) &= 2x^2 \cdot \frac{2}{x^3} - \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung (A2).
Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{x}v(x), \\ y_2'(x) &= -\frac{1}{x^2}v(x) + \frac{1}{x}v'(x), \\ y_2''(x) &= \frac{2}{x^3}v(x) - \frac{1}{x^2}v'(x) - \frac{1}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x) \\ &= \frac{2}{x^3}v(x) - \frac{2}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x). \end{aligned}$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung (A1), daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2y_2''(x) + 3xy_2'(x) - y_2(x) \\ &= 2x^2\left[\frac{2}{x^3}v(x) - \frac{2}{x^2}v'(x) + \frac{1}{x}v''(x)\right] + 3x\left[-\frac{1}{x^2}v(x) + \frac{1}{x}v'(x)\right] - \frac{1}{x}v(x) \\ &= v(x)\left[\frac{4}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x}\right] + v'(x)\left[-4+3\right] + 2xv''(x) \\ &= 2xv''(x) - v'(x) \\ \Leftrightarrow \;\; v''(x) &= \frac{1}{2x}v'(x). \end{aligned}$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = v''(x) = \frac{1}{2x}v'(x) = \frac{1}{2x}u(x). \; (A2')$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung (A2'): Die Lösung lautet:

$$u(x) = C_{\mathrm{h}}e^{\int \frac{1}{2z}\mathrm{d}z} = C_{\mathrm{h}}e^{\frac{1}{2}\log(|x|)} = C_{\mathrm{h}}\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2: Es gilt:

$$v(x) = \int v'(x)\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}x = \int C_{\mathrm{h}}\sqrt{|x|}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3} C_{\mathrm{h}} \operatorname{sign}(x) \, |x|^{\frac{3}{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x) v(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3} C_{\mathrm{h}} \operatorname{sign}(x) \, |x|^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} C_{\mathrm{h}} \, |x|^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} C_{\mathrm{h}} \sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C_{\mathrm{h}} = \frac{3}{2}$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = \sqrt{|x|} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung (A2): Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (A2) erhalten wir also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 \sqrt{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Aufstellen der speziellen Lösung y zum Anfangswertproblem (A2): Es gilt für die Ableitung von y:

$$y'(x) = -\frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2 \operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Wegen den Anfangswertbedingungen $y(4) = y'(4) = 1$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned}
1 = y(4) &= \frac{C_1}{4} + C_2 \sqrt{4} = \frac{C_1}{4} + 2C_2 \\
\Leftrightarrow \; 4 &= C_1 + 8C_2 \\
1 = y'(4) &= -\frac{C_1}{4^2} + \frac{C_2 \operatorname{sign}(4)}{2\sqrt{4}} = -\frac{C_1}{16} + \frac{C_2}{4} \\
\Leftrightarrow \; 16 &= -C_1 + 4C_2.
\end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich durch Addieren der beiden Gleichungen:

$$20 = 0C_1 + 12C_2 = 12C_2 \;\Leftrightarrow\; C_2 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.$$

Und damit muss für die Konstante C_1 gelten:

$$\begin{aligned}
4 &= C_1 + 8C_2 = C_1 + \frac{40}{3} \\
\Leftrightarrow \; C_1 &= \frac{12 - 40}{3} = -\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

Also ergibt sich als Lösung für unser Anfangswertproblem (A2):

$$y(x) = -\frac{28}{3x} + \frac{5}{3}\sqrt{|x|}$$

für alle $x \in (0, \infty)$. $\square$