11.11.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

3. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 15.11.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme, bestimmen Sie dabei zuerst stets die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(1) $y''' - y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{1}{2},\ y''(0) = 0.$

(2) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 6.$

Lösung von Aufgabe 1

Vorüberlegung: Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} y^{(n-j)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = s(x)$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und Störfunktion s. Wir möchten nun diese Differentialgleichung allgemein lösen.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen finden: Das charakteristische Polynom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhalten wir durch Einsetzen von $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ in den Term

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} y^{(n-j)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

für y und Ausklammern von $\mathrm{e}^{\lambda x}$, d.h.

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \lambda^{n-j} = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \lambda$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieses Polynom p hat nun nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung: Wir erhalten n linear unabhängige Lösungen $\Phi_{\mathrm{h},1}, \ldots, \Phi_{\mathrm{h},n}$ der homogenen Differentialgleichung passend zu jedem λ_j, $j = 1, \ldots, n$, je nachdem ob es sich um eine einfache oder eine mehrfache Nullstelle von p handelt.
Also ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben durch:

$$y_{\mathrm{h}} = \sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{h},j} \Phi_{\mathrm{h},j} = C_{\mathrm{h},1} \Phi_{h,1} + \ldots + C_{\mathrm{h},n} \Phi_{\mathrm{h},n}.$$

Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung Nun machen wir eine Variation der Konstanten (ähnlich wie bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung):

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \Phi_{\mathrm{h},j}(x) = C_1(x) \Phi_{\mathrm{h},1}(x) + \ldots + C_n(x) \Phi_{\mathrm{h},n}(x)$$

und setzen diese in die obere Differentialgleichung ein. Dazu bilden wir erstmal die Ableitung

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = \left(C_1(x) \Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + \ldots + C_n(x) \Phi_{\mathrm{h},n}'(x)\right) + \left(C_1'(x) \Phi_{\mathrm{h},1}(x) + \ldots + C_n'(x) \Phi_{\mathrm{h},n}(x)\right).$$

Würden wir nun nochmals ableiten, dann bekommen wir allerdings auch höhere Ableitungen von C_j, $j = 1, \dots, n$, um dies zu verhindern wählen wir diese so, dass die hintere Klammer verschwindet, d.h.

$$C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}(x) = 0$$

und

$$y_{\mathrm{p}}'(x) = C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}'(x).$$

So erhalten wir für die zweite Ableitung

$$y_{\mathrm{p}}''(x) = \left(C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}''(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}''(x)\right) + \left(C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}'(x)\right).$$

Mit derselben Argumentation machen wir nun auch den Ansatz

$$C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}'(x) = 0$$

und erhalten so

$$y_{\mathrm{p}}''(x) = C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}''(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}''(x).$$

Führen wir dies immer weiter kommen wir auf die $n-1$ Gleichungen

$$C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(k)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(k)} = 0$$

für alle $k = 0, \dots, n-2$ und erhalten so für die ersten $n-1$ Ableitungen von y_{p}

$$y_{\mathrm{p}}^{(k)}(x) = C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(k)}(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(k)}(x)$$

für alle $k = 1, \dots, n-1$. Durch erneutes Differenzieren der $n-1$ten Ableitungen folgt:

$$y_{\mathrm{p}}^{(n)}(x) = \left(C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n)}(x)\right) + \left(C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x)\right).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung bekommen wir nun

$$\begin{aligned}
s(x) &= a_n \left[\left(C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n)}(x)\right) + \left(C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x)\right)\right] \\
&\quad + a_{n-1}\left[C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x)\right] + \ldots \\
&\quad + a_1\left[C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}'(x)\right] \\
&\quad + a_0\left[C_1(x)\Phi_{\mathrm{h},1}(x) + \ldots + C_n(x)\Phi_{\mathrm{h},n}(x)\right] \\
&= C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x) \\
&\quad + C_1\left[a_n\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n)}(x) + a_{n-1}\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + a_0\Phi_{\mathrm{h},1}(x)\right] + \ldots \\
&\quad + C_n\left[a_n\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n)}(x) + a_{n-1}\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\Phi_{\mathrm{h},n}'(x) + a_0\Phi_{\mathrm{h},1}(x)\right] \\
&= C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x),
\end{aligned}$$

die die Funktionen $\Phi_{\mathrm{h},1}, \dots, \Phi_{\mathrm{h},n}$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Also haben wir somit ein Gleichungssystem mit n Unbekannten und n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n} &= 0, \\
C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}'(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}' &= 0, \\
&\vdots \\
C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-2)} &= 0, \\
C_1'(x)\Phi_{\mathrm{h},1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\Phi_{\mathrm{h},n}^{(n-1)}(x) &= s(x).
\end{aligned}$$

Lösen wir dieses System, erhalten wir erst $C_1', \dots, C_n'$ und durch integrieren (mit Integrationskonstante null) bekommen wir die $C_1, \dots, C_n$ und damit dann auch die partikuläre Lösung y_{p}.
Schritt 3. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich durch

$$y = y_{\mathrm{p}} + y_{\mathrm{h}}.$$

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = (\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ durch Raten der Nullstelle $\lambda = 1$ und anschließender Polynomdivision. Wir haben als reelle einfach Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und als nicht-reelle/ echt-komplexe einfache Nullstellen $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = \mathrm{i}$.

Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1): Aus der reellen einfachen Nullstelle erhalten wir die Fundamentallösung:

$$\Phi_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da die Nullstellen $\lambda_{2,3} = \mp\mathrm{i}$ nicht-reell/ echt-komplex sind, erhalten wir nach der Formel von de Moivre/ Eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\lambda_3 x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir, da es sich um einfache Nullstellen handelt, die folgenden zwei Fundamentallösungen:

$$\Phi_2(x) = \cos(x) \text{ und } \Phi_3(x) = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1):

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) + C_{\mathrm{h},3}\Phi_3(x) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^x + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) + C_{\mathrm{h},3}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3} \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1) machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\cos(x) + C_3(x)\sin(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot), C_3(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\cos(x) + C_3'(x)\sin(x) &= 0,\\
C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x) &= 0,\\
C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\cos(x) - C_3'(x)\sin(x) &= 2\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Addieren wir nun die erste und die dritte Gleichung miteinander, erhalten wir

$$2C_1'(x)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{-x} \;\Leftrightarrow\; C_1'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also erhalten wir schon mal

$$C_1(x) = \int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun durch Einsetzen von $C_1'(\cdot)$ in die zweite Gleichung und Umstellen der Gleichungen erhalten wir einmal:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{e}^{-x} - C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x)\\
\Leftrightarrow\; C_2'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} + C_3'(x)\cos(x)}{\sin(x)}.
\end{aligned}$$

Einsetzen iin die erste Gleichung ergibt laut dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{e}^{-x} + C_2'(x)\cos(x) + C_3'(x)\sin(x)\\
&= \mathrm{e}^{-x} + \frac{\mathrm{e}^{-x} + C_3'(x)\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \cos(x) + C_3'(x)\sin(x)\\
&= \mathrm{e}^{-x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + C_3'(x)\cos^2(x) + C_3'(x)\sin^2(x)}{\sin(x)}\\
&= \mathrm{e}^{-x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + C_3'(x)\left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)}{\sin(x)}\\
&= \mathrm{e}^{-x} + \frac{\cos(x)\mathrm{e}^{-x} + C_3'(x)}{\sin(x)}\\
\Leftrightarrow\; 0 &= C_3'(x) + \sin(x)\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\\
\Leftrightarrow\; C_3'(x) &= -\sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-x} = -\left(\sin(x) + \cos(x)\right)\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. So erhalten wir letztendlich für $C_2'(\cdot)$ laut dem trigonometrischen Pythagoras

$$\begin{aligned}
C_2'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x} + C_3'(x)\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} - (\sin(x) + \cos(x))\cos(x)\mathrm{e}^{-x}}{\sin(x)} \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1-\cos^2(x)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)}\mathrm{e}^{-x} \\
&= \sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-x} \\
&= (\sin(x) - \cos(x))\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für die unbestimmten Integrale nach zweimaliger bzw. einmaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\mathrm{e}^{-x} - \int \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(x)\mathrm{e}^{-x} - \sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)\mathrm{e}^{-x}, \\
\int \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \sin(x)\mathrm{e}^{-x} + \int \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\left(\sin(x) + \cos(x)\right)\mathrm{e}^{-x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt für $C_2(\cdot)$ bzw. $C_3(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
C_2(x) &= \int \left(\sin(x)\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(-\left(\sin(x) + \cos(x)\right) - \left(\sin(x) - \cos(x)\right)\right)\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\sin(x)\mathrm{e}^{-x}, \\
C_3(x) &= -\int \left(\sin(x)\mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\left(\sin(x) + \cos(x)\right) + \sin(x) - \cos(x)\right)\mathrm{e}^{-x} \\
&= \cos(x)\mathrm{e}^{-x},
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. So erhalten wir für die partikuläre Lösung zur Differentialgleichung (1):

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{p}}(x) &= C_1(x)\mathrm{e}^{x} + C_2(x)\cos(x) + C_3(x)\sin(x) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-x} + \sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-x} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (1): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautet

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{h}}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{x} + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) + C_{\mathrm{h},3}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3} \in \mathbb{R}$.

Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung zum Anfangswertproblem (1): Die beiden Ableitungen sind gegeben durch

$$y'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{x} - C_{\mathrm{h},2}\sin(x) + C_{\mathrm{h},3}\cos(x),$$

$$y''(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{x} - C_{\mathrm{h},2}\cos(x) - C_{\mathrm{h},3}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir in der Auswertung in $x = 0$:

$$\begin{aligned}
y(0) &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{0} + C_{\mathrm{h},2}\cos(0) + C_{\mathrm{h},3}\sin(0) = -\frac{1}{2}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},1}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},2}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},3}\cdot 0 = -\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} + 0 \\
&= -\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}, \\
y'(0) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{0} - C_{\mathrm{h},2}\sin(0) + C_{\mathrm{h},3}\cos(0) = \frac{1}{2}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},1}\cdot 1 - C_{\mathrm{h},2}\cdot 0 + C_{\mathrm{h},3}\cdot 1 = \frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} - 0 + C_{\mathrm{h},3} \\
&= \frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},3}, \\
y''(0) &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-0} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{0} - C_{\mathrm{h},2}\cos(0) - C_{\mathrm{h},3}\sin(0) = -\frac{1}{2}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},1}\cdot 1 - C_{\mathrm{h},2}\cdot 1 - C_{\mathrm{h},3}\cdot 0 = -\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} - C_{\mathrm{h},2} - 0 \\
&= -\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} - C_{\mathrm{h},2}.
\end{aligned}$$

Durch

$$1 = 1 - 0 = y(0) - y''(0) = \left(-\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} - C_{\mathrm{h},2}\right) = 2C_{\mathrm{h},2}$$

erhalten wir $C_{\mathrm{h},2} = \frac{1}{2}$ und aus $y(0) = 1$ dann auch:

$$1 = y(0) = -\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} = -\frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + \frac{1}{2} = C_{\mathrm{h},1}.$$

Also folgt für $C_{\mathrm{h},3}$ nun durch $y'(0) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = y'(0) = \frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},3} = \frac{1}{2} + 1 + C_{\mathrm{h},3} = \frac{3}{2} + C_{\mathrm{h},3} \;\Leftrightarrow\; C_{\mathrm{h},3} = -1.$$

Damit erhalten wir als Lösung vom Anfangswertproblem (1):

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{x} + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) + C_{\mathrm{h},3}\sin(x) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} + \frac{\cos(x)}{2} - \cos(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ laut erster binomischer Formel. Wir haben als reelle doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2): Aus der reellen doppelten Nullstelle erhalten wir die beiden Fundamentallösungen:

$$\Phi_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{3x} \text{ und } \Phi_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x} = x\mathrm{e}^{3x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2):

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{3x} + C_{\mathrm{h},2}x\mathrm{e}^{3x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) lautet

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{3x} + C_{\mathrm{h},2}x\mathrm{e}^{3x} = [C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}x]\,\mathrm{e}^{3x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Aufstellen der speziellen Lösung zum Anfangswertproblem (2): Die erste Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{3x} + 3\,[C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}x]\,\mathrm{e}^{3x} \\
&= [3C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}\,(1 + x)]\,\mathrm{e}^{3x}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir in der Auswertung in $x = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= -\left[C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} \cdot 0\right] \mathrm{e}^{3 \cdot 0} = \left[C_{\mathrm{h},1} + 0\right] \mathrm{e}^{0} = C_{\mathrm{h},1} \cdot 1 = C_{\mathrm{h},1}, \\ y'(0) &= \left[3C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}\,(1+0)\right] \mathrm{e}^{3 \cdot 0} = \left[3C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} \cdot 1\right] \mathrm{e}^{0} = \left[3C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}\right] \cdot 1 = 3C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}. \end{aligned}$$

Durch

$$1 = y(0) = C_{\mathrm{h},1}$$

erhalten wir aus $y'(0) = 6$ dann auch:

$$6 = y'(0) = 3C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} = 3 \cdot 1 + C_{\mathrm{h},2} = 3 + C_{\mathrm{h},2} \;\Leftrightarrow\; C_{\mathrm{h},2} = 3.$$

Damit erhalten wir als Lösung vom Anfangswertproblem (2):

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} x\right] \mathrm{e}^{3x} \\ &= \left[1 + 3x\right] \mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 (Eulersche Differentialgleichungen)

Lösen Sie die beiden Eulerschen Differentialgleichungen auf dem Intervall $(0,\infty)$:

(1) $x^2y'' + xy' - y = 0$.

(2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \log(x)$.

Lösung von Aufgabe 2

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} & v'(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ & v''(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) - v'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1):

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - v(t) \\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) + v'(t) - v(t) \\ &= v''(t) - v(t). \qquad (1') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$. Es handelt sich jeweils um zwei einfache reelle Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1'): Aus der reellen einfachen Nullstelle $\lambda_1 = -1$ erhalten wir die Fundamentallösung:

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus der reellen einfachen Nullstelle $\lambda_2 = 1$ erhalten wir die Fundamentallösung:

$$\Phi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1'):

$$v_{\mathrm{h}}(t) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(t) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(t) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-t} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v(\log(x)) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-\log(x)} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{\log(x)} = \frac{C_{\mathrm{h},1}}{x} + C_{\mathrm{h},2}x$$

für alle $x \in (0,\infty)$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$. □

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} & v'(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ & v''(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) - v'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (2):

$$t = \log\left(\mathrm{e}^t\right) = \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''\left(\mathrm{e}^t\right) - 3\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 4y\left(\mathrm{e}^t\right)$$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) - 3\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 4v(t)\\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) - 3v'(t) + 4v(t)\\ &= v''(t) - 4v'(t) + 4v(t). \qquad (2')\end{aligned}$$

Nun haben wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ laut der ersten binomischen Formel. Es handelt sich hierbei um eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2'): Aus der reellen doppelten Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ erhalten wir die beiden Fundamentallösungen:

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{2t} \text{ und } \Phi_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = t\mathrm{e}^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also erhalten wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2'):

$$v_{\mathrm{h}}(t) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{2t} + C_{\mathrm{h},2}t\mathrm{e}^{2t} = \left[C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}t\right]\mathrm{e}^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die homogene Lösung der Differentialgleichung zu (2') machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten

$$v_{\mathrm{p}}(t) = C_1(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2(t)t\mathrm{e}^{2t}.$$

Aus der Vorüberlegung von Aufgabe 1 auf diesem Übungsblatt bekommen wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)t\mathrm{e}^{2t} &= 0\\ 2C_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)(1+2t)\mathrm{e}^{2t} &= t.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung umgeformt liefert

$$C_1'(t) = -tC_2'(t);$$

dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} t &= 2C_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)\left(1+2t\right)\mathrm{e}^{2t}\\ &= -2C_2'(t)t\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)\left(1+2t\right)\mathrm{e}^{2t}\\ &= C_2'(t)\left(-2t+1+2t\right)\mathrm{e}^{2t}\\ &= \mathrm{e}^{2t}C_2'(t)\\ \Leftrightarrow\ C_2'(t) &= t\mathrm{e}^{-2t},\end{aligned}$$

d.h.

$$C_1'(t) = -tC_2'(t) = -t^2\mathrm{e}^{-2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also erhalten wir jeweils durch einmalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\\ &= -\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t},\\ C_1(t) &= \int -t^2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t} - \int t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}\\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So folgt für die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{p}}(t) &= C_1(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2(t)t\mathrm{e}^{2t} \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2t} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2t}t\mathrm{e}^{2t} \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t\right) \\
&= \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \\
&= \frac{t+1}{4}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2'): Für die allgemeine Lösung zu (2') gilt nun:

$$v(t) = v_{\mathrm{p}}(t) + v_{\mathrm{h}}(t) = \frac{t+1}{4} + \left(C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}t\right)\mathrm{e}^{2t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
y(x) = v\left(\log(x)\right) &= \frac{\log(x)+1}{4} + \left(C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}\log(x)\right)\mathrm{e}^{2\log(x)} \\
&= \frac{\log(x)+1}{4} + \left(C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2}\log(x)\right)x^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$. $\square$