22.11.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

4. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 29.11.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Die Binomialreihe und ihre Anwendung)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und das folgende Anfangswertproblem gegeben:

$$(1+x)\,y' - \alpha y = 0,\ \ y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie einmal mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die Lösung y und zeigen Sie anschließend, dass diese mit der Funktion

$$f\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (1+x)^{\alpha}$$

übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie nun mit dem Wissen aus Aufgabenteil (a) die Potenzreihenentwicklung (um den Ursprung) von der Funktion

$$\arcsin\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R}.$$

(c) Lösen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ mit Koeffizienten $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die Lösung u vom folgenden Anfangswertproblem

$$\left(1-x^2\right) u'' - xu' = 2,\ \ u(0) = u'(0) = 0.$$

Welche Verbindung besteht zwischen der Lösung u und der Funktion arcsin aus Aufgabenteil (b). Beweisen Sie diese Vermutung.

Aufgabe 2 (Potenzreihenansatz)

Bestimmen Sie durch den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die Lösung y vom folgenden Anfangswertproblem:

$$y'' + xy = \sin(x),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -6$$

und schreiben Sie die Lösung u bis zu den ersten fünf Summanden exakt auf (d.h. bis einschließlich c_4).

Aufgabe 3 (Abgewandelter Potenzreihenansatz)

Zeigen Sie, dass bei der folgenden Differentialgleichung

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \text{ auf } (0,\infty)$$

im Punkt $x_0 = 0$ eine schwach singuläre Stelle vorliegt und führen Sie einen abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n}$$

mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ und Exponenten $r \in \mathbb{R}$ durch um zwei linear unabhängige Lösungen, y_1 und y_2, zu finden.

Hinweise:

- Die **schriftliche Klausur** findet am **Freitag**, den **06.03.2020** von **10.30 bis 12.30 Uhr** statt. Genauere Informationen dazu werden in der Vorlesung und Übung, sowie auf der Homepage (siehe unten) veröffentlicht.
- Der **Anmeldeschluss** für diese Klausur ist **Sonntag, der 23.02.2020**. Bitte melden Sie sich zu der Klausur rechtzeitig an und überprüfen Sie ihre Anmeldung. Ein Rücktritt von der Klausur ist bis zu einem Tag vor der Klausur online oder am Tag der Klausur selber noch direkt im Hörsaal ohne Konsequenzen möglich!
- **Warnung**: **Eine spätere Anmeldung als bis zum 23.02.2020 ist <u>nicht möglich</u>!!**
- Die Internetadresse zur Internetseite der Veranstaltung lautet:

`www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2019w/`