22.11.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Die Binomialreihe und ihre Anwendung)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und das folgende Anfangswertproblem gegeben:

$$(1+x)\,y' - \alpha y = 0,\ \ y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie einmal mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die Lösung y und zeigen Sie anschließend, dass diese mit der Funktion

$$f\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto (1+x)^{\alpha}$$

übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie nun mit dem Wissen aus Aufgabenteil (a) die Potenzreihenentwicklung (um den Ursprung) von der Funktion

$$\arcsin\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R}.$$

(c) Lösen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ mit Koeffizienten $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die Lösung u vom folgenden Anfangswertproblem

$$\left(1-x^2\right) u'' - xu' = 2,\ \ u(0) = u'(0) = 0.$$

Welche Verbindung besteht zwischen der Lösung u und der Funktion arcsin aus Aufgabenteil (b). Beweisen Sie diese Vermutung.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Differentialgleichung (a) ist dabei äquivalent zu

$$y' - \frac{\alpha}{1+x} y = 0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ können wir die Koeffizienten der obigen Differentialgleichung per geometrische Reihe in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\frac{-\alpha}{1+x} = -\alpha \cdot \frac{1}{1-(-x)} = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 - \alpha(-1)^n x^n,$$

d.h. die Potenzreihe y hat mindestens Konvergenzradius 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (a): Setzen wir den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in die Differentialgleichung (a) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = (1+x)\,y'(x) - \alpha y(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} x^n + n c_n x^n - \alpha c_n x^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} + n c_n - \alpha c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} - (\alpha - n)\, c_n\right] x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\, c_{n+1} - (\alpha - n)\, c_n = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(n+1)\, c_{n+1} = (\alpha - n)\, c_n \\
\Leftrightarrow\ &c_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} c_n.
\end{aligned}$$

Damit legt insbesondere c_0 alle Koeffizienten fest. Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass

$$c_n = \frac{(\alpha - (n-1)) \cdot (\alpha - (n-2)) \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 0)}{n!} c_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang (I.A.) $n = 1$: Es gilt:

$$c_1 = c_{0+1} = \frac{\alpha - 0}{0+1} c_0 = \frac{(\alpha - (1-1))}{1!} c_0.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig und für dieses n gelte:

$$c_n = \frac{(\alpha - (n-1)) \cdot (\alpha - (n-2)) \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 0)}{n!} c_0.$$

Induktionsschluss (I.S.): Es gilt nun für $n+1$ laut der bewiesenen Vorschrift und der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \frac{\alpha - n}{n+1} c_n \\
&= \frac{\alpha - n}{n+1} \cdot \frac{(\alpha - (n-1)) \cdot (\alpha - (n-2)) \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 0)}{n!} c_0 \\
&= \frac{(\alpha - (n+1-1)) \cdot (\alpha - (n-2)) \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 0)}{(n+1)!} c_0.
\end{aligned}$$

Dies war in der vollständigen Induktion zu beweisen.
Wir führen die Notation ein:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{(\alpha - (n-1)) \cdot (\alpha - (n-2)) \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 0)}{n!} \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit haben wir nun gezeigt, dass

$$c_n = \binom{\alpha}{n} c_0$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Schritt 4. Die allgemeine y der Differentialgleichung (a) aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung (a):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} c_0 x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ mit Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$.
Lösen vom Anfangswertproblem:
Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem (a) aufstellen: Der Anfangswert ergibt den Wert c_0:

$$1 = y(0) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 0^n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot c_n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 = c_0 + 0 = c_0.$$

Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem (a):

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$.
Weitere Darstellung der Lösung:
Weiter zeigen wir, dass auch die Funktion $\widetilde{y}$ das Anfangswertproblem (a) löst, denn die Funktion $\widetilde{y}$ ist als Verkettung von stetig-differenzierbaren Funktionen auf $(-1, 1)$ wieder stetig differenzierbar auf $(-1, 1)$ mit der Ableitung

$$\widetilde{y}'(x) = \alpha \left(1 + x\right)^{\alpha - 1}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Damit gilt:

$$(1 + x)\, \widetilde{y}'(x) - \alpha \widetilde{y}(x) = (1 + x) \cdot \alpha \left(1 + x\right)^{\alpha - 1} - \alpha \left(1 + x\right)^{\alpha} = \alpha \left(1 + x\right)^{\alpha} - \alpha \left(1 + x\right)^{\alpha} = 0,$$

sowie

$$\widetilde{y}(0) = \left(1 + 0\right)^{\alpha} = 1^{\alpha} = 1.$$

Damit ist $\widetilde{y}$ die Lösung vom Anfangswertproblem (a). Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von Anfangswertproblemen muss nun

$$\left(1 + x\right)^{\alpha} = \widetilde{y}(x) = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gelten. $\square$
Bemerkung (zur obigen Notation): Ist $\alpha = m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$, so haben wir die Darstellung:

$$\begin{aligned}
\binom{m}{n} &= \frac{m!}{(m - n)! \cdot n!} = \frac{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - (n - 1)) \cdot (m - n)!}{(m - n)! \cdot n!} \\
&= \frac{(m - 0) \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - (n - 1))}{n!} \\
&= \frac{(m - (n - 1)) \cdot (m - (n - 2)) \cdot \ldots \cdot (m - 1) \cdot (m - 0)}{n!} \\
&= \frac{(\alpha - (n - 1)) \cdot (\alpha - (n - 2)) \cdot \ldots \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Notation gerechtfertigt ist, d.h. wir haben hier eine Erweiterung vom Binomialkoeffizienten auf ganz $\mathbb{R}$ gewonnen.
(b) Dazu ist für $x \in (-1, 1)$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ist nun $x \in (-1,1)$, so ist auch $-x^2 \in (-1,1)$, und setzen wir $\alpha := -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, dann folgt mit Aufgabenteil (a) für $x \in (-1,1)$:

$$\arcsin'(x) = \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Da für alle $x \in (-1,1)$ die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergiert, dürfen wir beim Integrieren die Summe und das Integral vertauschen, d.h. wir haben per Integration:

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \int_0^x \arcsin'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^{2n}\right] \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^x (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^{2n} \mathrm{d}t\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{0^{2n+1}}{2n+1}\right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{0}{2n+1}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 0\right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots
\end{aligned}$$

für alle $x \in (-1,1)$. Damit haben wir die Funktion arcsin auf $(-1,1)$ als eine Potenzreihe dargestellt. □

(c) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n, \\
u'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} = c_1 x^{1-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n d_n x^{n-1} = c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n d_n x^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n d_n x^{n-1}, \\
u''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, d_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Differentialgleichung (c) ist dabei äquivalent zu

$$u'' - \frac{x}{1-x^2} u' = \frac{2}{1-x^2}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ können wir die Koeffizienten der obigen Differentialgleichung per geometrische Reihe in eine Potenzreihe entwickeln, da so auch $\left|x^2\right| < 1$ ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \\
\frac{-x}{1-x^2} &= -x \cdot \frac{1}{1-x^2} = -x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} -x^{2n+1}, \\
\frac{2}{1-x^2} &= 2 \cdot \frac{1}{1-x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n},
\end{aligned}$$

d.h. die Potenzreihe u hat mindestens Konvergenzradius 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (c): Setzen wir den Potenzreihenansatz $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ in die Differentialgleichung (c) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
2 &= \left(1 - x^2\right) u''(x) - x u'(x) = \left(1 - x^2\right) \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, d_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, d_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, d_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1) d_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) d_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) d_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n d_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} x^n - n(n-1) d_n x^n - n d_n x^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n(n-1) d_n - n d_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n(n-1+1) d_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n^2 d_n\right] x^n \\
&= \left[(0+2)(0+1) d_{0+2} - 0^2 d_0\right] x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n^2 d_n\right] x^n \\
&= (2 \cdot 1 d_2 - 0 \cdot d_0) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n^2 d_n\right] x^n \\
&= (2d_2 - 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n^2 d_n\right] x^n \\
&= 2d_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) d_{n+2} - n^2 d_n\right] x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$
\begin{aligned}
2d_2 &= 2 \\
\Leftrightarrow \quad d_2 &= 1, \\
\Leftrightarrow \quad (n+2)(n+1) d_{n+2} - n^2 d_n &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad (n+2)(n+1) d_{n+2} &= n^2 d_n \\
\Leftrightarrow \quad d_{n+2} &= \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} d_n
\end{aligned}
$$

Schritt 4. Die allgemeine u der Differentialgleichung (c) aufstellen: Damit haben wir als Lösung u der Differentialgleichung (c):

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = d_0 x^0 + d_1 x^1 + d_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n x^n = d_0 \cdot 1 + d_1 x + 1 \cdot x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n x^n \\
&= d_0 + d_1 x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in (-1, 1)$ mit den beiden Konstanten $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ und der Vorschrift:

$$
d_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} d_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.
$$

Lösen vom Anfangswertproblem:

Schritt 5. Die spezielle Lösung u vom Anfangswertproblem (c) aufstellen: Die Anfangsdaten ergeben die Werte d_0 und d_1:

$$
\begin{aligned}
0 = u(0) &= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot 0^n = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot d_n = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = d_0 + 0 = d_0, \\
0 = u'(0) &= d_1 + \sum_{n=2}^{\infty} d_n \cdot 0^{n-1} = d_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot d_n = d_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = d_1 + 0 = d_1.
\end{aligned}
$$

Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem (c):

$$u(x) = d_0 + d_1 x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n x^n = 0 + 0 \cdot x + x^2 + d_3 x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} d_n x^n = 0 + x^2 + 0 \cdot x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} d_n x^n$$
$$= x^2 + 0 + \sum_{n=4}^{\infty} d_n x^n = x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} d_n x^n = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \dots$$

für alle $x \in (-1, 1)$ mit der Vorschrift

$$d_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} d_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wegen

$$d_3 = d_{1+2} = \frac{1^2}{(1+2)(1+1)} d_1 = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot 0 = \frac{0}{6} = 0.$$

<u>Weitere Darstellung der Lösung</u>:
Weiter zeigen wir, dass auch die Funktion $\widetilde{u}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin^2(x)$ das Anfangswertproblem (c) löst, denn die Funktion $\widetilde{c}$ ist als Verkettung von stetig-differenzierbaren Funktionen auf $(-1,1)$ wieder stetig differenzierbar auf $(-1,1)$ mit den Ableitungen

$$\widetilde{u}'(x) = 2\arcsin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\widetilde{u}''(x) = 2\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{\sqrt{1-x^2}^2}$$
$$= 2\frac{1 + \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

für alle $x \in (-1,1)$. Damit gilt:

$$\left(1-x^2\right)\widetilde{u}''(x) - x\widetilde{u}'(x) = \left(1-x^2\right) \cdot 2\frac{1 + \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - x \cdot 2\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\left[1 + \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\arcsin(x)}{1-x^2}\right] = 2 \cdot 1 = 2,$$

sowie

$$\widetilde{u}(0) = \arcsin^2(0) = 0^2 = 0,$$
$$\widetilde{u}'(0) = \frac{\arcsin(0)}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Damit ist $\widetilde{u}$ die Lösung vom Anfangswertproblem (c). Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von Anfangswertproblemen muss nun

$$\arcsin^2(x) = \widetilde{u}(x) = u(x) = x^2 + \sum_{n=4}^{\infty} d_n x^n$$

für alle $x \in (-1,1)$ gelten. □

Aufgabe 2 (Potenzreihenansatz)

Bestimmen Sie durch den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die Lösung y vom folgenden Anfangswertproblem:

$$y'' + xy = \sin(x),\ y(0) = 1,\ y'(0) = -6$$

und schreiben Sie die Lösung u bis zu den ersten fünf Summanden exakt auf (d.h. bis einschließlich c_4).

Lösung von Aufgabe 2

Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \\
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x^{1-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, c_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Wir setzen für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\beta_n := \begin{cases} 0, & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n \text{ ungerade mit } n = 2k+1 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

dann haben wir die Potenzreihenentwicklung

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die beiden Funktionen, $x \mapsto x$ und $x \mapsto \sin(x)$, haben damit Konvergenzradius unendlich und so besitzt die Lösung der Differentialgleichung ebenfalls den Konvergenzradius unendlich, ist also auf ganz $\mathbb{R}$ als Potenzreihe darstellbar mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. **Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung**: Setzen wir den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = 0 \cdot 1 = \beta_0 x^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \sin(x) = y''(x) + xy(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, c_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+2-1)\, c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\
&= (0+2)\,(0+1)\, c_{0+2} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\
&= 2 \cdot 1 \cdot c_2 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\, c_{n+2} x^n + c_{n-1} x^n\right] \\
&= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\, c_{n+2} + c_{n-1}\right] x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$2c_2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ c_2 = 0,\\
(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + c_{n-1} &= \beta_n\\
\Leftrightarrow\ (n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} &= \beta_n - c_{n-1}\\
\Leftrightarrow\ c_{n+2} &= \frac{\beta_n - c_{n-1}}{(n+2)\,(n+1)}
\end{aligned}
$$

Schritt 4. Die allgemeine y der Differentialgleichung aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} d_n x^n = c_0 \cdot 1 + c_1 x + 0 \cdot x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n\\
&= c_0 + c_1 x + 0 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ und der Vorschrift:

$$
c_{n+2} = \frac{\beta_n - c_{n-1}}{(n+2)\,(n+1)}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Lösen vom Anfangswertproblem:
Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem aufstellen: Die Anfangsdaten ergeben die Werte d_0 und d_1:

$$
\begin{aligned}
1 = y(0) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 0^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = c_0 + 0 = c_0,\\
-6 = y'(0) &= c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot 0^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot c_n = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = c_1 + 0 = c_1
\end{aligned}
$$

Weiter folgt nun aus der obigen Vorschrift:

$$
\begin{aligned}
c_3 &= c_{1+2} = \frac{\beta_1 - c_{1-1}}{(1+2)\,(1+1)} = \frac{\beta_{2\cdot 0+1} - c_0}{3 \cdot 2} = \frac{\frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!} - 1}{6} = \frac{\frac{1}{1!} - 1}{6} = \frac{\frac{1}{1} - 1}{6} = \frac{1-1}{6} = \frac{0}{6} = 0,\\
c_4 &= c_{2+2} = \frac{\beta_2 - c_{2-1}}{(2+2)\,(2+1)} = \frac{\beta_{2\cdot 1} - c_1}{4 \cdot 3} = \frac{0-(-6)}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_0 + c_1 x + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n = 1 - 6x + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n = 1 - 6x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \sum_{n=5}^{\infty} c_n x^n\\
&= 1 - 6x + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{2} x^4 + \sum_{n=5}^{\infty} c_n x^n = 1 - 6x + 0 + \frac{1}{2} x^4 + \sum_{n=5}^{\infty} c_n x^n = 1 - 6x + \frac{1}{2} x^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$
c_{n+2} = \frac{\beta_n - c_{n-1}}{(n+2)\,(n+1)}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Aufgabe 3 (Abgewandelter Potenzreihenansatz)

Zeigen Sie, dass bei der folgenden Differentialgleichung

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \text{ auf } (0, \infty)$$

im Punkt $x_0 = 0$ eine schwach singuläre Stelle vorliegt und führen Sie einen abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n}$$

mit Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ und Exponenten $r \in \mathbb{R}$ durch um zwei linear unabhängige Lösungen, y_1 und y_2, zu finden.

Lösung von Aufgabe 3

Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und einer Potenz $r \in \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Schwache Singularität bei $x_0 = 0$: Setze

$$P(x) := x, \ Q(x) := 2, \ R(x) := x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= P(0) = 0, \\
(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} &= (x-0)\frac{2}{x} = x \cdot \frac{2}{x} = 2, \\
(x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= (x-0)^2 \frac{x}{x} = x^2 \cdot 1 = x^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\rho = \infty$. Damit existiert die Lösung y stets auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ laut Vorlesung. **Schritt 2. Abgewandelten Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung**: Setzen wir den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(n+r)\, c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)\,(n+r-1)\, c_n x^{n+r-1} + 2\,(n+r)\, c_n x^{n+r-1}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,[(n+r-1)+2]\, c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r+1)\, c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1+r)\,(n+1+r+1)\, c_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r+2)\, c_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= (-1+r+1)(-1+r+2)\, c_{-1+1} x^{-1+r} + (0+r+1)(0+r+2)\, c_{0+1} x^{0+r} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r+1)(n+r+2)\, c_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= r(r+1)\, c_0 x^{r-1} + (r+1)(r+2)\, c_1 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r+1)(n+r+2)\, c_{n+1} x^{n+r} + c_{n-1} x^{n+r}\right] \\
&= r(r+1)\, c_0 x^{r-1} + (r+1)(r+2)\, c_1 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r+1)(n+r+2)\, c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^{n+r}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, also gilt für r wegen $c_0 \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
r(r+1)\, c_0 &= 0 \\
\Leftrightarrow\ r(r+1) &= 0 \\
\Leftrightarrow\ r = 0 &\text{ oder } r = -1.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$r_1 := 0 \text{ und } r_2 := -1.$$

Demnach ist nun

$$r_1 - r_2 = 0 - (-1) = 1 \in \mathbb{N},$$

d.h. wir sind in Fall 3.
Es muss gelten für $r = r_1 = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= r(r_1+1)\, c_0 x^{r_1-1} + (r_1+1)(r_1+2)\, c_1 x^{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r_1+1)(n+r_1+2)\, c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^{n+r_1} \\
&= 0 + (0+1)(0+2)\, c_1 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+0+1)(n+0+2)\, c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^{n+0} \\
&= 1 \cdot 2 \cdot c_1 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)\, c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^n \\
&= 2c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)\, c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelten:

$$
\begin{aligned}
2c_1 &= 0 \\
\Leftrightarrow\ c_1 &= 0, \\
(n+1)(n+2)\, c_{n+1} + c_{n-1} &= 0 \\
\Leftrightarrow\ (n+1)(n+2)\, c_{n+1} &= -c_{n-1} \\
\Leftrightarrow\ c_{n+1} &= \frac{-c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}
$$

Da wir nur an einer Lösung interessiert sind und nicht der allgemeinen, wählen wir der Einfachheit hier $c_0 = 1 \neq 0$. Damit gilt induktiv:

$$
\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_0 \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \\
c_{2k+1} &= 0
\end{aligned}
$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion.
Induktionsanfang (I.A.) $k = 0$: Es gilt:

$$1 = c_0 = c_{2\cdot 0} = \frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1)!} = \frac{1}{1!} = 1,$$
$$0 = c_1 = c_{1\cdot 0+1}.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses k gelte

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \text{ und } c_{2k+1} = 0.$$

Induktionsschluss (I.S.): Es ist nun für $k+1$ mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned} c_{2(k+1)} &= c_{2k+2} = c_{2k+1+1} = \frac{-c_{2k+1-1}}{(2k+1+2)\,(2k+1+1)} = \frac{-c_{2k}}{(2\,(k+1)+1)\,(2k+2)} \\ &= \frac{-1}{(2\,(k+1)+1)\,(2\,(k+1))} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2\,(k+1)+1)!}, \\ c_{2(k+1)+1} &= c_{2k+2+1} = \frac{-c_{2k+2-1}}{(2k+2+2)\,(2k+2+1)} \\ &= \frac{-c_{2k+1}}{(2k+4)\,(2k+3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-0}{2\,(k+2)\,(2k+3)} = \frac{0}{2\,(k+2)\,(2k+3)} = 0.$$

Dies war gerade zu zeigen.
Schritt 4. Die Lösungen y_1 der Differentialgleichung aufstellen: Da wir im Fall 3. des Satzes sind, lautet die erste Lösung y_1 der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}\right] = 1 \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^{2k+1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} + 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Die Lösung y_2 der Differentialgleichung bestimmen: Da wir im Fall 3. des Satzes sind, hat die zweite Lösung y_2, welche linear unabhängig zur Lösung y_1 ist, der Differentialgleichung die Form:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= C y_1(x) \log(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\ &= C y_1(x) \log(x) + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = C y_1(x) \log(x) + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Versuch: $C = 0$.
Dann muss für eine Lösung der Form y_2 gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= r\,(r_2+1)\,d_0 x^{r_2-1} + (r_2+1)\,(r_2+2)\,d_1 x^{r_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r_2+1)\,(n+r_2+2)\,d_{n+1} + d_{n-1}\right] x^{n+r_2} \\ &= 0 + (-1+1)\,(-1+2)\,d_1 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1+1)\,(n-1+2)\,d_{n+1} + d_{n-1}\right] x^{n-1} \\ &= 0 \cdot 1 \cdot d_1 \cdot x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\,(n+1)\,d_{n+1} + d_{n-1}\right] x^{n-1} \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\,(n+1)\,d_{n+1} + d_{n-1}\right] x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[n\,(n+1)\,d_{n+1} + d_{n-1}\right] x^{n-1} \end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Damit folgt direkt per Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} n(n+1)\,d_{n+1} + d_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow\ n(n+1)\,d_{n+1} &= -d_{n-1} \\ \Leftrightarrow\ d_{n+1} &= \frac{-d_{n-1}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da wir nur an einer Lösung interessiert sind, können wir

$$d_0 = 1 \neq 0 \text{ und } d_1 = 0$$

wählen. Damit gilt induktiv:

$$\begin{aligned} d_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} d_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \\ c_{2k+1} &= 0 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion.
Induktionsanfang (I.A.) $k = 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 = d_0 = c_{2\cdot 0} &= \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1, \\ 0 = d_1 &= d_{1\cdot 0+1}. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses k gelte

$$d_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \text{ und } d_{2k+1} = 0.$$

Induktionsschluss (I.S.): Es ist nun für $k+1$ mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned} d_{2(k+1)} = d_{2k+2} = d_{2k+1+1} &= \frac{-d_{2k+1-1}}{(2k+1+1)(2k+1)} = \frac{-d_{2k}}{(2(k+1))(2k+1)} \\ &= \frac{-1}{(2(k+1))(2k+1)} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}, \\ c_{2(k+1)+1} = c_{2k+2+1} &= \frac{-c_{2k+2-1}}{(2k+2+1)(2k+2)} \\ &= \frac{-c_{2k+1}}{2(2k+3)(k+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-0}{2(2k+3)(k+1)} = \frac{0}{2(2k+3)(k+1)} = 0.$$

Dies war gerade zu zeigen.
Damit lautet die zweite Lösung y_2, welche linear unabhängig zu y_1 ist, von der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= Cy_1(x)\log(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\ &= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k+1} x^{2k+1}\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^{2k+1}\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} 0\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + 0\right] \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos(x)}{x}$$

für alle $x \in (0, \infty)$. $\square$