10.12.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

5. Übungsblatt
(wird am Freitag, den 13.12.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Anwendung vom Banachschen Fixpunktsatz)

Gegeben sei der Operator

$$T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]) \text{ definiert durch } (Tf)(x) := (T(f))(x) := 1 + x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \text{ für } x \in [0,1] \text{ und } f \in C^0([0,1]).$$

Zeigen Sie, dass der Operator T genau einen Fixpunkt $f^* \in C^0([0,1])$ hat. Welches Anfangswertproblem löst dann diese Funktion f^*?

Aufgabe 2 (Typische Picard-Lindelöff Aufgabe)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung y auf dem Intervall $I := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hat und dieses Intervall I auch gleich das größte Lösungsintervall ist, welches wir mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöff erhalten können. Berechnen Sie anschließend die ersten Schritte der Picard-Iteration $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ und $y^{(3)}$.

Aufgabe 3 (Hinreichendes Kriterium für lokale Lipschitz-Stetigkeit)

Zeigen Sie die beiden Aussagen:

(a) Seien $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge, $n, m \in \mathbb{N}$, und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist die Menge K kompakt und konvex, sowie die Funktion f stetig-differenzierbar, so ist die Funktion f auch Lipschitz-stetig auf der Menge K.

(b) Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $n \in \mathbb{N}$, und

$$f\colon U \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine Funktion. Ist die Funktion f stetig-differenzierbar bzgl. der zweiten Variable, so ist die Funktion f auch lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variable auf der Menge U.

Hinweise:

- Die **schriftliche Klausur** findet am **Freitag**, den **06.03.2020** von **10.30 bis 12.30 Uhr** statt. Genauere Informationen dazu werden in der Vorlesung und Übung, sowie auf der Homepage (siehe unten) veröffentlicht.
- Der **Anmeldeschluss** für diese Klausur ist **Sonntag, der 23.02.2020**. Bitte melden Sie sich zu der Klausur rechtzeitig an und überprüfen Sie ihre Anmeldung. Ein Rücktritt von der Klausur ist bis zu einem Tag vor der Klausur online oder am Tag der Klausur selber noch direkt im Hörsaal ohne Konsequenzen möglich!
- **Warnung**: **Eine spätere Anmeldung als bis zum 23.02.2020 ist nicht möglich!!**
- Die Internetadresse zur Internetseite der Veranstaltung lautet:

`www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2019w/`