10.12.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Anwendung vom Banachschen Fixpunktsatz)

Gegeben sei der Operator

$$T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]) \text{ definiert durch } (Tf)(x) := (T(f))(x) := 1 + x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \text{ für } x\in[0,1] \text{ und } f\in C^0([0,1]).$$

Zeigen Sie, dass der Operator T genau einen Fixpunkt $f^*\in C^0([0,1])$ hat. Welches Anfangswertproblem löst dann diese Funktion f^*?

Lösung von Aufgabe 1

Bekannt ist, dass der Raum $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum (vollständiger normierter Vektorraum) ist. So ist auch die Menge $C^0[0,1]$ abgeschlossen und nicht-leer. Wir zeigen, dass der Operator T eine Kontraktion ist, seien dazu $x\in[0,1]$ und $f,g\in C^0[0,1]$ beliebig, so gilt per Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x)-(Tg)(x)| &= \left|1+x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - \left(1+x\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= x\left|\int_0^x t\left(f(t)-g(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\le x\int_0^x t\left|f(t)-g(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\le x\int_0^x t\mathrm{d}t \sup_{s\in[0,1]}|f(s)-g(s)| \\
&= \frac{1}{2}x^2\|f-g\|_\infty \\
&\le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun:

$$\|Tf-Tg\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|(Tf)(x)-(Tg)(x)| \le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty ,$$

d.h. T ist eine Kontraktion. So sind alle Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt und nach diesen existiert genau eine Funktion $f_*\in C^0[0,1]$ mit

$$f_*(x) = (Tf_*)(x) = 1 + x\int_0^x tf_*(t)\mathrm{d}t \text{ für alle } x\in[0,1].$$

So ist die rechte Seite stetig-differenzierbar, also ist $f_*\in C^1[0,1]$mit der Ableitung

$$f_*'(x) = \int_0^x tf_*(t)\mathrm{d}t + x^2 f_*(x) \text{ für alle } x\in[0,1].$$

Nun ist erneut die rechte Seite stetig-differenzierbar, demnach ist f_*' stetig-differenzierbar, also ist $f_*\in C^2[0,1]$ mit zweiter Ableitung

$$f_*''(x) = xf_*(x) + 2xf_*(x) + x^2 f_*'(x) = 3xf_*(x) + x^2 f_*'(x).$$

Weiter ist $f_*(0)=1$ und $f_*'(0)=0$. So ergibt sich das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} f_*'' - x^2 f_*' - 3xf* = 0, \\ f_*(0) = 1, \\ f_*'(0) = 0. \end{cases}$$

□

Aufgabe 2 (Typische Picard-Lindelöff Aufgabe)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung y auf dem Intervall $I := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hat und dieses Intervall I auch gleich das größte Lösungsintervall ist, welches wir mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöff erhalten können. Berechnen Sie anschließend die ersten Schritte der Picard-Iteration $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ und $y^{(3)}$.

Lösung von Aufgabe 2

Setze $f(x, y) = x^2 + y^2$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, also ist $f \in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$. Zu $r, s > 0$ haben wir das Rechteck $R = (-r, r) \times (-s, s)$ und

$$K := \sup_{(x,y)\in R} |f(x, y)| = r^2 + s^2.$$

Es gilt laut Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left|x^2 + y_1^2 - \left(x^2 + y_2^2\right)\right| = \left|y_1^2 - y_2^2\right| \\ &= |y_1 + y_2| \, |y_1 - y_2| \\ &\leq (|y_1| + |y_2|) \, |y_1 - y_2| \\ &\leq 2s \, |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in R$. Laut der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung $y\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ für geeignete $r, s > 0$. Wähle r, s maximal, so ist die maximale Länge des Intervalls $l := 2 \min\left\{r, \frac{s}{r^2+s^2}\right\}$. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon (0, \infty) \to (0, \infty), \; s \mapsto \frac{s}{r^2 + s^2}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{r^2 + s^2 - 2s^2}{\left(r^2 + s^2\right)^2} = \frac{r^2 - s^2}{\left(r^2 + s^2\right)^2} \text{ für alle } s \in (0, \infty), \\ 0 = g'(s) &= \frac{r^2 - s^2}{\left(r^2 + s^2\right)^2} \;\Leftrightarrow\; r^2 - s^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 = s^2 \Leftrightarrow\; s = \pm r \\ g''(s) &= \frac{-2s\left(r^2 + s^2\right)^2 - 4\left(r^2 - s^2\right)\left(r^2 + s^2\right)s}{\left(r^2 + s^2\right)^4} \\ &= \frac{-2\left(sr^2 + s^3 + 2r^2 s - 2s^3\right)}{\left(r^2 + s^2\right)^3} = -2\frac{3sr^2 - s^3}{\left(r^2 + s^2\right)^3} \text{ für alle } s \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$g''(r) = -2\frac{3r^3 - r^3}{8r^6} = -\frac{1}{2}r^{-3} < 0 \text{ und } g(r) = \frac{r}{2r^2} = \frac{1}{2r}.$$

Damit wird l maximal für

$$r = g(r) = \frac{1}{2r} \;\Leftrightarrow\; r^2 = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also muss $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelten und wir haben für die eindeutige maximale Lösung $y\colon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \mathbb{R}$. **Picard-Iteration**: Es ergeben sich laut der Vorschrift der Picard-Iteration mit $x_0 = 0 = y_0$:

$$\begin{aligned} y^{(0)}(x) &= y_0 = 0, \\ y^{(1)}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(1-1)}(t)\right) \mathrm{d}t = 0 + \int_0^x f\left(t, y^{(0)}(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^x f(t, 0)\mathrm{d}t = \int_0^x t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3, \\ y^{(2)}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(2-1)}(t)\right) \mathrm{d}t = 0 + \int_0^x f\left(t, y^{(1)}(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^x f\left(t, \frac{1}{3}t^3\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9}t^6\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7, \\ y^{(3)}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y^{(3-1)}(t)\right) \mathrm{d}t = 0 + \int_0^x f\left(t, y^{(2)}(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^x f\left(t, \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{2}{189}t^{10} + \frac{1}{3969}t^{14}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{55566}x^{15} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. □

Aufgabe 3 (Hinreichendes Kriterium für lokale Lipschitz-Stetigkeit)

Zeigen Sie die beiden Aussagen:

(a) Seien $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge, $n, m \in \mathbb{N}$, und $f \colon K \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist die Menge K kompakt und konvex, sowie die Funktion f stetig-differenzierbar, so ist die Funktion f auch Lipschitz-stetig auf der Menge K.

(b) Seien $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $n \in \mathbb{N}$, und

$$f \colon U \to \mathbb{R}^n, \ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine Funktion. Ist die Funktion f stetig-differenzierbar bzgl. der zweiten Variable, so ist die Funktion f auch lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variable auf der Menge U.

Lösung von Aufgabe 3

(a) Seien $x, y \in K$ beliebig, so ist auch $\theta x + (1-\theta)y \in K$ für alle $\theta \in [0,1]$, da die Menge K konvex ist. Nach dem Mittwelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $\theta_0 \in (0,1)$, $\zeta_0 := \theta_0 x + (1-\theta_0)\, y \in K$, mit

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f'(\zeta_0) \cdot (x-y)| \\ &\leq |f'(\zeta_0)|\, |x-y| \\ &\leq \sup_{z \in K} |f'(z)|\, |x-y| \\ &= \max_{z \in K} |f'(z)|\, |x-y| \\ &=: L\, |x-y| \end{aligned}$$

mit

$$L := \max_{z \in K} |f'(z)| \geq 0,$$

weil die Funktion f' stetig und die Menge K kompakt ist. Damit ist die Funktion f Lipschitz-stetig auf der Menge K. $\square$

(b) Sei $(x_0, y_0) \in U$ beliebig. Da die Menge U offen ist, finden wir einen Radius $r > 0$ mit

$$\overline{B_r\left((x_0, y_0)\right)} \subseteq U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

weiter ist die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B_r\left((x_0, y_0)\right)}$$

kompakt und konvex in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Wähle nun $(x, y_1), (x, y_2) \in B_r\left((x_0, y_0)\right)$ beliebig. So gibt es laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\theta_0 \in (0,1)$, $\zeta_0 \theta_0 y_1 + (1-\theta_0)\, y_2$, mit

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \zeta_0) \cdot (y_1 - y_2) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \zeta_0) \right| |y_1 - y_2| \\ &\leq \sup_{(t,z) \in B_r((x_0,y_0))} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right| |y_1 - y_2| \\ &= \max_{(t,z) \in \overline{B_r((x_0,y_0))}} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right| |y_1 - y_2| \\ &= L\, |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

mit

$$L := \max_{(t,z) \in \overline{B_r((x_0,y_0))}} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right| \geq 0,$$

weil die Funktion $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig und die abgeschlossene Kugel $\overline{B_r\left((x_0, y_0)\right)}$ kompakt ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Damit ist die Funktion f lokal Lipschitz-stetig auf der Menge U. $\square$