08.01.2020
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Matrixexponentialfunktion)

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem bzw. eine reelle Fundamentalmatrix Φ zu der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrixexponentialfunktion $\exp(tA)$.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Fundamentalsystem/-matrix bestimmen:
Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) - 6 - 6 + 3(3-\lambda) + 6(2-\lambda) - 2(-2-\lambda) \\ &= -\left(4-\lambda^2\right)(3-\lambda) - 12 + 9 + 12 + 4 - 3\lambda - 6\lambda + 2\lambda \\ &= -\left(12 - 4\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3\right) + 13 - 7\lambda \\ &= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Also hat p eine dreifache Nullstelle in $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \in \mathbb{R}$, d.h. die algebraische Vielfachheit ist gleich 3 von $\lambda = 1$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für den Eigenraum:

$$\begin{aligned} E_1 = \ker(A - 1\cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Damit gilt für die geoemtrische Vielfachheit

$$\dim(E_1) = \dim\left(\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right) = 2 \neq 3.$$

Hier benötigen wir noch den ersten Hauptraum zu $\lambda = 1$, da die geometrische und die algebraische Vielfachheit ungleich sind. Es gilt für den Hauptraum:

$$H_1 = \ker(A - 1\cdot I_3)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$$

$$= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

d.h. wir haben die beiden Eigenvektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt.

Schritt 3. Die Fundamentallösungen, das Fundamentalsystem und die Fundamentalmatrix aufstellen:
Die drei Fundamentallösungen ergeben sich nun durch

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^1}{1!} (A - 1I_3)^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\,\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Damit lauten das Fundamentalsystem

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1+t)\,\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Fundamentalmatrix Φ lautet damit:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^t & (1+t)\,\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t & 0 & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1+t \\ -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
(b) Matrixexponentialfunktion aufstellen:
Schritt 4. $\Phi(0)$ und $\Phi(0)^{-1}$ berechnen:
Es ist für $t = 0$

$$\Phi(0) = \mathrm{e}^0 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1+0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Die inverse Matrix $\Phi(0)^{-1}$ lässt sich elementar berechnen und wir erhalten:

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Schritt 5. Matrixexponentialfunktion berechnen: Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\exp(tA) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1+t \\ -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1+t & 2t & -3t \\ t & 1+2t & -3t \\ t & 2t & 1-3t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Inhomogene Anfangswertprobleme mit reellen Eigenwerte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad b(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad y_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung y des inhomogenen Differentialgleichungssystem $y' = Ay + b$ mittels Variation der Konstanten.

(b) Bestimmen Sie nun die spezielle reellwertige Lösung y vom inhomogenen Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = Ay + b, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(c) Gebe es in Teil (a) auch einen einfacheren Weg um an die partikuläre Lösung zu gelangen?

Lösung von Aufgabe 2

Es handelt sich um ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
(a) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2-\lambda & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)^3 - \frac{1}{3}(2-\lambda) - \frac{2}{3}(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).
\end{aligned}$$

Also hat p drei einfache Nullstellen bei $\lambda = 1, 2, 3$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für den Eigenraum:

$$\begin{aligned}
E_1 = \ker(A - 1 \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_2 = \ker(A - 2 \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_3 = \ker(A - 3 \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
(b) **Schritt 4. Partikuläre Lösung aufstellen/ Variation der Konstanten**: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$y_p(t) = C_1(t) \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(t) \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3(t) \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert nun

$$\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1(t) \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(t) \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3(t) \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3\mathrm{e}^{2t} \\ -1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ 2 & \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow C'(t) := \begin{pmatrix} C_1'(t), \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix} \qquad = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3\mathrm{e}^{2t} \\ -1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ 2 & \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3\mathrm{e}^{2t} \\ -1 & \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ 2 & \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösen wir dies (Inerse Matrix berechnen und mit dem Vektor multiplizieren), dann erhalten wir:

$$C_1'(t) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-2t}, \; C_2'(t) = \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-3t} \text{ und } C_3'(t) = -\frac{1}{6} \mathrm{e}^{-4t},$$

d.h.

$$C_1(t) = -\frac{1}{4} \mathrm{e}^{-2t}$$
$$C_2(t) = -\frac{2}{9} \mathrm{e}^{-3t}$$
$$C_3(t) = \frac{1}{24} \mathrm{e}^{-4t}.$$

Also ist die partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{2} - \frac{2}{9} - \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix}.$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung: Es gilt:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$
$$= \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix} + C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 6. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

So sehen wir direkt, dass $C_1 = C_3 = \frac{1}{6}$ und $C_2 = 0$ gelten muss. Die Lösung lautet:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
(c) Wir hätten auch die partikuläre Lösung y_p "raten" können, dass dieser die Form

$$y_\mathrm{p}(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dies besitzt die Ableitung

$$y_\mathrm{p}'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun setzen wir dies in die Differentialgleichung ein und erhalten damit

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} &= y_\mathrm{p}'(t) = Ay_\mathrm{p}(t) + b(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 3 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Und dieses Gleichungssystem lösen wir nun um a, b und c zu erhalten. □

Aufgabe 3 (Inhomogene Anfangswertprobleme mit komplexen Eigenwerten)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung y des inhomogenen Differentialgleichungssystem $y' = Ay + b$ per "Raten der partikulären Lösung".

(b) Bestimmen Sie nun die spezielle reellwertige Lösung y vom inhomogenen Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = Ay + b, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(1-\lambda) + 9(1-\lambda) \end{aligned}$$

$$= (1-\lambda)\left((2-\lambda)^2+9\right).$$

Also hat p drei einfache Nullstellen bei $\lambda = 1$ und bei $\lambda = 2 \pm 3\mathrm{i}$.

Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker\left(A - 1 \cdot I_3\right) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_{2-3\mathrm{i}} &= \ker\left(A - (2-3\mathrm{i}) \cdot I_3\right) = \ker \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 2 & -1+3\mathrm{i} & 2 \\ -3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 2 & -1+3\mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & \frac{2+2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Wir benötigen bei komplexen Eigenwerten nur einen, der andere ergebe sich durch komplex konjugieren.

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die komplexe Funktion

$$\begin{aligned}
z_h(t) &= \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(3t) - \mathrm{i}\sin(3t)\right) \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) - 3\mathrm{i}\sin(3t) + \mathrm{i}\cos(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) - 2\mathrm{i}\sin(3t) + 2\mathrm{i}\cos(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) - \mathrm{i}\sin(3t) - 3\mathrm{i}\cos(3t) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

löst das homogene Anfangswertproblem (komplexwertig). Die reelle Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(t) = C_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Man kann hier theoretisch auch wieder Variation der Konstanten anwenden, jedoch wird es schwer eine allgemein gültige Inverse Matrix zu finden. Es empfiehlt sich hier einen anderen Ansatz zu wählen, in dem man die Form der partikulären Lösung "ratet".

Schritt 4. Partikuläre Lösung durch "Raten": Dafür zerlegen wir unsere Nicht-Linearität in mehrere Teile.

$$b_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } b_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also gilt:

$$b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5+\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = b_1(t) + b_2(t).$$

Für den ersten Fall machen wir den Ansatz

$$y_{p,1}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung ein. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y'_{p,1}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} y_{p,1}(t) + b_1(t) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösen wir dies, erhalten wir

$$a = 1, \ b = 1, \ c = -1 \text{ bzw. } y_{p,1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Fall machen wir den Ansatz

$$y_{p,2}(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und setzen diesen in die Differentialgleichung ein, dies ergibt:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = y'_{p,2}(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} y_{p,2}(t) + b_2(t) \\ &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2I_3 \right] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösen wir dies, erhalten wir

$$a = \frac{1}{3}, \ b = \frac{2}{3}, \ c = 0 \text{ bzw. } y_{p,2}(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Schritt 5. Allgemeine Lösung aufstellen: So ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - 3\sin(3t) \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(c) **Schritt 6. Spezielle Lösung aufstellen**: Wegen der Anfangswertbedingung

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3C_1 \\ 3C_2 \\ 3C_3 \end{pmatrix}.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystem erhalten wir

$$3C_1 = -3, \; 3C_2 = 0 \text{ und } 3C_3 = -1,$$

bzw.

$$C_1 = -1, \; C_2 = 0 \text{ und } C_3 = -\frac{1}{3}.$$

Dies liefert die spezielle Lösung zum Anfangswertproblem:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3} \begin{pmatrix} -3\sin(3t) + \cos(3t) \\ -2\sin(3t) + 2\cos(3t) \\ -\sin(3t) - 3\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$