16.01.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Inhomogene Transportgleichung)

Lösen Sie das folgende inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+t}, \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-5x} \end{cases} .$$

Vorbemerkung:
Sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Die lineare Transportgleichung lautet

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + a \cdot \nabla u(t,x) = g(t,x), \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

mit Lösung

$$u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

und Inhomogenität

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

sowie Anfangswert

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Ist die Funktion f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und die Funktion g stetig, sowie stetig partiell differenzierbar nach x, so lautet die Lösung der linearen Transportgleichung:

$$u(t,x) = f(x - at) + \int_0^t g(r, x - a(t-r))\mathrm{d}r$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung von Aufgabe 1

Schritt 1. Setting aufstellen: Es handelt sich um eine lineare (inhomogene) Transportgleichung. In diesem Fall lautet:

$$\begin{aligned} a &= 3, \\ f(x) &= \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-5x}, \\ g(t,x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t+x} \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und die Funktion g ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sowie insbesondere stetig partiell differenzierbar nach x.
Schritt 2. Lösungsformel anwenden: Es muss also für die Lösung u gelten:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x - at) + \int_0^t g(r, x - a(t-r))\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{e}^{3t-x} + 3\mathrm{e}^{5(3t-x)} + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{r+(x-3(t-r))}\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{e}^{3t-x} + 3\mathrm{e}^{5(3t-x)} + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{4r} \cdot \mathrm{e}^{x-3t}\mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{3t-x} + 3\mathrm{e}^{5(3t-x)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-3t}\int_0^t \mathrm{e}^{4r}\,\mathrm{d}r \\
&= \mathrm{e}^{3t-x} + 3\mathrm{e}^{5(3t-x)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-3t}\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4r}\right]_0^t \\
&= \mathrm{e}^{3t-x} + 3\mathrm{e}^{5(3t-x)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-3t}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \mathrm{e}^{3t-x} + 3\mathrm{e}^{15t-5x)} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{x+t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{x-3t}
\end{aligned}
$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 (Charakteristiken-Verfahren)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mithilfe eines Charakteristiken-Verfahren:

(1)

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + 4\partial_x u(t,x) = u^2(t,x), \\ u(0,x) = \cos(x) \end{cases}.$$

(2)

$$\begin{cases} x\partial_x u(x,y,z) + y\partial_y u(x,y,z) + \partial_z u(x,y,z) = u(x,y,z) \\ u(x,y,0) = xy \end{cases}.$$

Lösung von Aufgabe 2

(1) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$\begin{aligned} a(t,x,u) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ b(t,x,u) &= u^2(t,x), \\ f(x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(t,x,u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u(t,x) = b(t,x,u) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}.$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k:

$$k(s) = \begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u \right)(k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u \right)(k(s)) \\ a(k(s), w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u \right)(k(s)) &= b(k(s), w(s)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = k'(s) = a(k(s), w(s)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ w'(s) = b(k(s), w(s)) &= w^2(s), \\ k(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ w(0) = u(k(0)) = u\left(0, x_0\right) &= \cos\left(x_0\right). \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:
Lösung für k: Es handelt sich bei t wie bei x um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:

$$\begin{aligned} t(s) &= s + C_1, \\ x(s) &= 4s + C_2 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung erhalten wir:

$$\begin{aligned} t(s) &= s, \\ x(s) &= 4s + x_0 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Lösung k:

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = k(s) = \begin{pmatrix} s \\ 4s + x_0 \end{pmatrix}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Lösung für w: Es handelt sich hierbei um eine homogene Ricatti-Differentialgleichung (also ein Spezialfall der Bernoulli-Differentialgleichung). Durch Umstellen und Substituieren mit

$$z = \frac{1}{w} \text{ bzw. } z' = -\frac{w'}{w^2}$$

erhalten wir so

$$\begin{aligned} w' &= w^2 \\ \Leftrightarrow \ -\frac{w'}{w^2} &= -1 \\ \Leftrightarrow \ z' &= -1. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung z lautet:

$$z(s) = -s + C_3$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $C_3 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert:

$$w(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{1}{C_3 - s}$$

mit einer Konstanten $C_3 \in \mathbb{R}$ und allen $s \in \mathbb{R} \setminus \{C_3\}$. Wegen der Anfangswertbedingung $w(0) = \cos(x_0)$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \cos(x_0) = w(0) &= \frac{1}{C_3} \\ \Leftrightarrow \ C_3 &= \frac{1}{\cos(x_0)}, \end{aligned}$$

wir wählen

$$x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ y \in \mathbb{R} \colon y = (2l+1)\frac{\pi}{2} \text{ mit } l \in \mathbb{Z} \right\}$$

beliebig (Platzhalter). Damit erhalten wir die spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{1}{\frac{1}{\cos(x_0)} - s} \\ &= \frac{\cos(x_0)}{1 - s\cos(x_0)} \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\cos(x_0)} \right\}$.
Schritt 4. Nach s, x_0 **auflösen und Einsetzen**: Lösen wir nach s auf, so erhalten wir:

$$s = t(s).$$

Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir:

$$x_0 = x(s) - 4s = x(s) - 4t(s).$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned} u(t(s), x(s)) = u(k(s)) = w(s) &= \frac{\cos(x_0)}{1 - s\cos(x_0)} \\ &= \frac{\cos(x(s) - 4t(s))}{1 - t(s)\cos(x(s) - 4t(s))}. \end{aligned}$$

Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung lautet

$$u(t, x) = \frac{\cos(x - 4t)}{1 - t\cos(x - 4t)}$$

für alle Paare

$$(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(\tau, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon 1 - \tau\cos(\gamma - 4\tau) = 0\}.$$

$\square$

(2) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$
\begin{aligned}
a(x,y,z,u) &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \\
b(x,y,z,u) &= u(x,y,z), \\
f(x,y) &= xy.
\end{aligned}
$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$
\begin{cases}
a(x,y,z,u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u(x,y,z) = b(x,y,z,u) \\
u(x,y,z) = f(x,y)
\end{cases}.
$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k:

$$
k(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix},
$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u \right)(k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u \right)(k(s)) \\
a(k(s), w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u \right)(k(s)) &= b(k(s), w(s)).
\end{aligned}
$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = k'(s) = a(k(s), w(s)) &= \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 1 \end{pmatrix}, \\
w'(s) = b(k(s), w(s)) &= w(s), \\
k(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
w(0) = u(k(0)) = u\left(x_0, y_0, 0\right) &= x_0 y_0.
\end{aligned}
$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:
Lösung für k: Es handelt sich bei x, y wie bei z um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:

$$
\begin{aligned}
x(s) &= C_1 \mathrm{e}^s, \\
y(s) &= C_2 \mathrm{e}^s, \\
z(s) &= s + C_3
\end{aligned}
$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
x(s) &= x_0 \mathrm{e}^s, \\
y(s) &= y_0 \mathrm{e}^s, \\
z(s) &= s
\end{aligned}
$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Lösung k:

$$
\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = k(s) = \begin{pmatrix} x_0 \mathrm{e}^s \\ y_0 \mathrm{e}^s \\ s \end{pmatrix}
$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Lösung für w: Es handelt sich hierbei um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung davon lautet

$$w(s) = C_4 \mathrm{e}^s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_4 \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangswertbedingung $w(0) = x_0 y_0$ folgt nun:

$$x_0 y_0 = w(0) = C_4 \mathrm{e}^0 = C_4.$$

Wir können hier $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ als beliebige Platzhalter wählen. Damit erhalten wir die spezielle Lösung:

$$w(s) = x_0 y_0 \mathrm{e}^s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Nach s, x_0, y_0 **auflösen und Einsetzen**: Lösen wir nach s auf, so erhalten wir:

$$s = z(s).$$

Lösen wir nach x_0 und y_0 auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(s)\mathrm{e}^{-s} = x(s)\mathrm{e}^{-z(s)}, \\ y_0 &= y(s)\mathrm{e}^{-s} = y(s)\mathrm{e}^{-z(s)}. \end{aligned}$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s), z(s)) = u(k(s)) = w(s) &= x_0 y_0 \mathrm{e}^{-s} \\ &= x(s)\mathrm{e}^{-z(s)} y(s)\mathrm{e}^{-z(s)} \mathrm{e}^{z(s)} = x(s)y(s)\mathrm{e}^{-z(s)}. \end{aligned}$$

Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung lautet

$$u(x, y, z) = xy\mathrm{e}^{-z}$$

für alle Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\square$

Aufgabe 3 (Radialsymmetrische Lösungen)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen von der Partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u(x) = -1 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition (Radialsymmetrisch): Wir nennen eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ radialsymmetrisch genau dann, wenn es eine Funktion $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$u = g \circ r,$$

wobei

$$r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \text{ für alle } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ist, d.h.

$$u(x) = g\left(\|x\|\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Lösung von Aufgabe 3

Schritt 1. Radialsymmetrische Bedingung: Sei u eine Lösung so, dass es eine Funktion $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = g\left(\|x\|\right) \text{ für alle } x.$$

Schritt 2. Ableitungen berechnen: Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} r(x) &= \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|},\\
\partial_{x_i x_j} r(x) &= \frac{\delta_{ij}\|x\| - \frac{x_i x_j}{\|x\|}}{\|x\|^2} = \frac{\delta_{ij}\|x\|^2 - x_i x_j}{\|x\|^3},\\
\partial_{x_i} u(x) &= g'\left(\|x\|\right) \cdot \partial_{x_i} r(x) = \frac{x_i g'\left(\|x\|\right)}{\|x\|},\\
\partial_{x_i x_j} u(x) &= g''\left(\|x\|\right) \cdot \partial_{x_i} r(x) \cdot \partial_{x_j} r(x) + g'\left(\|x\|\right) \cdot \partial_{x_i x_j} r(x)\\
&= \frac{x_i x_j g''\left(\|x\|\right)}{\|x\|^2} + \frac{\delta_{ij}\|x\|^2 - x_i x_j}{\|x\|^3} g'\left(\|x\|\right).
\end{aligned}$$

Schritt 3. Einsetzen in die Partielle Differentialgleichung: Wir erhalten durch Schritt 2. für alle x:

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i} u(x)\\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i^2 g''\left(\|x\|\right)}{\|x\|^2} + \frac{\|x\|^2 - x_i^2}{\|x\|^3} g'\left(\|x\|\right)\right]\\
&= \frac{\|x\|^2 g''\left(\|x\|\right)}{\|x\|^2} + \frac{n\|x\|^2 - \|x\|^2}{\|x\|^3} g'\left(\|x\|\right)\\
&= g''\left(\|x\|\right) + \frac{n-1}{\|x\|} g'\left(\|x\|\right)\\
&= g''(r(x)) + \frac{n-1}{r(x)} g'(r(x)).
\end{aligned}$$

Dies liefert nun durch Einsetzen die Gleichung

$$-1 = \Delta u(x) = g''(r(x)) + \frac{n-1}{r(x)} g'(r(x)).$$

Damit erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$g'' + \frac{n-1}{r} g' = -1.$$

Schritt 4. Lösen der Gewöhnlichen Differentialgleichung: Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei der Term g nicht vorkommt, also setzen wir

$$h = g'$$

und erhalten durch Einsetzen die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$h' + \frac{n-1}{r}h = g'' + \frac{n-1}{r}g' = -1.$$

Nun Lösen wir dies für h.
Lösung der homogenen Gleichung: Diese lautet:

$$h_h(r) = C_1 \mathrm{e}^{\int -\frac{n-1}{r}\mathrm{d}r} = C_1 \mathrm{e}^{-(n-1)\log(r)} = C_1 \mathrm{e}^{\log\left(r^{-(n-1)}\right)} = C_1 \frac{1}{r^{n-1}}$$

für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und einer Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.
Partikuläre Lösung/ Variation der Konstanten: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$h_p(r) = \frac{C(r)}{r^{n-1}}.$$

Abgeleitet ergibt dies:

$$h_p'(r) = \frac{C'(r)}{r^{n-1}} - (n-1)\frac{C(r)}{r^n}.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} -1 &= h_p' + \frac{n-1}{r}h_p = \frac{C'(r)}{r^{n-1}} - (n-1)\frac{C(r)}{r^n} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{C(r)}{r^{n-1}} \\ &= \frac{C'(r)}{r^{n-1}} - (n-1)\frac{C(r)}{r^n} + (n-1)\frac{C(r)}{r^n} = \frac{C'(r)}{r^{n-1}} \\ \Leftrightarrow \ C'(r) &= -r^{n-1} \\ \Leftrightarrow \ C(r) &= \int -r^{n-1}\mathrm{d}r = -\frac{1}{n}r^n. \end{aligned}$$

Also lautet unsere partikuläre Lösung hier:

$$h_p(r) = \frac{C(r)}{r^{n-1}} = \frac{-r^n}{nr^{n-1}} = -\frac{r}{n}.$$

Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung für h lautet nun:

$$h(r) = h_p(r) + h_h(r) = -\frac{r}{n} + C_1\frac{1}{r^{n-1}}$$

für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit einer Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.
Damit folgt für g:

$$\begin{aligned} g(r) &= \int h'(r)\mathrm{d}r = \int \left(-\frac{r}{n} + C_1\frac{1}{r^{n-1}}\right)\mathrm{d}r = -\frac{r^2}{2n} + \frac{C_1}{2-n}r^{2-n} + C_2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\backslash\{2\}, \\ g(r) &= \int h'(r)\mathrm{d}r = \int \left(-\frac{r}{2} + C_1\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r = -\frac{r^2}{4} + C_1\log\left(|r|\right) + C_2 \text{ für } n = 2 \end{aligned}$$

für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Radialsymmetrische Lösungen: Damit folgt für die radialsymmetrischen Lösungen u im Fall $n \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$:

$$u(x) = g\left(\|x\|\right) = -\frac{\|x\|^2}{2n} + \frac{C_1}{2-n}\|x\|^{2-n} + C_2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ und Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (Im Fall $n = 1$ können wir $x = 0$ zulassen).
Damit folgt für die radialsymmetrischen Lösungen u im Fall $n = 2$:

$$u(x) = g\left(\|x\|\right) = -\frac{\|x\|^2}{4} + C_1\log\left(\|x\|\right) + C_2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ und Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □