31.01.2020
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Separationsansatz)

Wir betrachten das folgende Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) &= 0 \text{ für } t > 0,\ x \in (0,1) \\ \partial_x u(t,0) = 0 &= \partial_x u(t,1) \text{ für } t > 0, \\ u(0,x) &= 1 + \cos(\pi x) \text{ für } x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie erst allgemein alle Lösungen der Form

$$u(t,x) = w(x)v(t)$$

der obigen Differentialgleichung und lösen SIe anschließend das Rand- und Anfangswertproblem.

Lösung von Aufgabe 1

Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten: Wir machen den Separationsansatz

$$u(t,x) = v(t)w(x).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= v'(t)w(x), \\ \partial_x u(t,x) &= v(t)w'(x), \\ \partial_{xx} u(t,x) &= v(t)w''(x). \end{aligned}$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen: Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & 0 = \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = v'(t)w(x) - v(t)w''(x) \\ \Leftrightarrow\ & v(t)w''(x) = v'(t)w(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{w''(x)}{w(x)} = \frac{v'(t)}{v(t)}. \end{aligned}$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle t, x gelten muss, müssen die beiden Quotienten

$$\frac{w''(x)}{w(x)} \text{ und } \frac{v'(t)}{v(t)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda^2 = \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} v'(t) &= \lambda^2 v(t), \\ w''(x) &= \lambda^2 w(x). \end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu v: Die Lösung zu v lautet nun

$$v(t) = C\mathrm{e}^{\lambda^2 t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten C.
Lösung zu w: Umgestellt bekommen wir

$$w''(x) - \lambda^2 w(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Als Lösung folgt nun

$$w(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda x}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst ($\lambda = 0$)

$$w(x) = C_1 + C_2 x$$

für jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten C_1, C_2.
Schritt 4. Randdaten beachten: Ist nun $\lambda = 0$, so erhalten wir für u:

$$u^{(0)}(t,x) = v^{(0)}(t) w^{(0)}(x) = C^{(0)} \left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)} x \right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$, bzw. für $\lambda \neq 0$

$$u^{(\lambda)}(t,x) = v^{(\lambda)}(t) w^{(\lambda)}(x) = C^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \left(C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda x} \right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C^{(\lambda)} = 1$ für alle möglichen λ. Wir möchten nun, dass die Randbedingung

$$\partial_x u^{(\lambda)}(t,0) = 0 = \partial_x u^{(\lambda)}(t,1)$$

für alle zulässigen λ erfüllt ist, dafür berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x u^{(0)}(t,x) &= C_2^{(0)}, \\
\partial_x u^{(\lambda)}(t,x) &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \left(-C_1^{(\lambda)} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \right) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \lambda \left(-C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda x} \right).
\end{aligned}$$

Damit gilt automatisch

$$0 = \partial_x u^{(0)}(t,0) = C_2^{(0)} = \partial_x u^{(0)}(t,1),$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda^2 t} \lambda \left(-C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} \right) = \partial_x u^{(\lambda)}(t,0) = 0 = \partial_x u^{(\lambda)}(t,1) &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \lambda \left(-C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} \right) \\
\Leftrightarrow \; -C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} = 0 &= -C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} \\
\Leftrightarrow \; &\begin{cases} C_1 = C_2 \\ 0 = -C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} \end{cases} \\
\Rightarrow \; 0 = -C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} &= -C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} = C_2^{(\lambda)} \left(-\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda} \right) \\
\Leftrightarrow \; -\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda} &= 0 \\
\Leftrightarrow \; \mathrm{e}^{-\lambda} &= \mathrm{e}^{\lambda} \\
\Leftrightarrow \; \mathrm{e}^{2\lambda} &= 1 \\
\Leftrightarrow \; \lambda &= \mathrm{i}k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung u_N aufstellen: Sei $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = \mathrm{i}k\pi$ für $k \in \mathbb{N}$ und $C_j^{(\lambda_k)} =: C_j^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2$. Dann ist die (komplexwertige) Lösung u_N von der Form

$$\begin{aligned}
u_N(t,x) &= u^{(0)}(t,x) + \sum_{k=1}^{N} u^{(k)}(t,x) \\
&= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + C_2^{(k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x} \right) \\
&= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + C_1^{(k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x} \right)
\end{aligned}$$

$$= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} C_1^{(k)} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1^{(0)} \in \mathbb{C}$ und $C_1^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$. Damit ist die (reellwertige) Lösung u_N von der Form

$$u_N(t,x) = \widetilde{C}_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \left(\widetilde{C}_1^{(k)} \sin(k\pi x) + \widetilde{C}_2^{(k)} \cos(k\pi x)\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $\widetilde{C}_1^{(0)} \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{C}_1^{(k)}, \widetilde{C}_2^{(k)} \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$.
Schritt 6. Spezielle Lösung u aufstellen: Die Anfangsbedingung liefert nun

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\pi x) = u(0,x) &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + C_2^{(k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + C_1^{(k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right) \\ &= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} C_1^{(k)} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right) \end{aligned}$$

wähle $N = 1$, $C_1^{(1)} = \frac{1}{2}$ und $C_1^{(0)} = 1$, so erhalten wir die Lösung

$$u(t,x) = 1 + \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi x}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bemerkung: In der Lösung bezeichnen wir der Einfachheit halber sowohl die reellwertige als auch die komplexwertige Lösung jeweils mit u_N, diese unterscheiden sich aber natürlich. Mit welcher wir aber weiterarbeiten ist dabei egal (!), beide führen auf dasselbe Ergebnis. Für die reellwertige Lösung müssen wir die Konstanten wie folgt wählen:

$$N = 1,\ \widetilde{C}_1^{(0)} = 1,\ \widetilde{C}_1^{(1)} = 0 \text{ und } \widetilde{C}_2^{(1)} = 1.$$

Dies liefert nun die Lösung

$$u(t,x) = 1 + \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \cos(\pi x)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Laplace in Polarkoordinaten)

Sei $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ eine Funktion. Berechnen Sie den Laplace in Polarkoordinaten, d.h. zeigen Sie, dass für

$$u(r,\varphi) = f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)$$

der Laplace Operator die folgende Darstellung hat:

$$\Delta f(x,y) = \partial_{rr} u(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r u(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} u(r,\varphi).$$

Lösung von Aufgabe 2

Schritt 1. Partielle Ableitungen bestimmen: Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial_r u(r,\varphi) &= \cos(\varphi)\partial_x f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + \sin(\varphi)\partial_y f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right), \\ \partial_{rr} u(r,\varphi) &= \cos^2(\varphi)\partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\partial_{xy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + \sin^2(\varphi)\partial_{yy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right), \\ \partial_\varphi u(r,\varphi) &= -r\sin(\varphi)\partial_x f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + r\cos(\varphi)\partial_y f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right), \\ \partial_{\varphi\varphi} u(r,\varphi) &= r^2\sin^2(\varphi)\partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) - 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\partial_{xy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) \\ &\quad + r^2\cos^2(\varphi)\partial_{yy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) - r\cos(\varphi)\partial_x f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) \\ &\quad - r\sin(\varphi)\partial_y f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\Big(\sin^2(\varphi)\partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\partial_{xy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cos^2(\varphi)\partial_{yy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) - \frac{1}{r}\Big(\cos(\varphi)\partial_x f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&+\sin(\varphi)\partial_y f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Schritt 2. Einsetzen und Zusammenfassen: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\partial_{rr}u(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r u(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}u(r,\varphi) &= \cos^2(\varphi)\partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\partial_{xy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&\quad + \sin^2(\varphi)\partial_{yy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + \frac{1}{r}\Big(\cos(\varphi)\partial_x f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&\quad + \sin(\varphi)\partial_y f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\Big) + \sin^2(\varphi)\partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&\quad - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\partial_{xy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + \cos^2(\varphi)\partial_{yy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&\quad - \frac{1}{r}\left(\cos(\varphi)\partial_x f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + \sin(\varphi)\partial_y f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\right)\\
&= \left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)\partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&\quad + \left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)\partial_{yy} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&= \partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) + \partial_{xx} f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)\\
&= \Delta f\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) = \Delta f(x,y).
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 3 (Laplace Gleichung)

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 \text{ auf } \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 1\right\},\\
u(x,y) &= x \text{ auf } \partial\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Nutzen Sie dabei Polarkoordinaten (siehe auch Aufgabe 2) und wenden Sie einen Separationsansatz an.

Lösung von Aufgabe 3

Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten: Wir setzen

$$v(r,\varphi) = u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Wir machen den Separationsansatz

$$v(r,\varphi) = a(r)b(\varphi).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\partial_r v(r,\varphi) &= a'(r)b(\varphi),\\
\partial_{rr} v(r,\varphi) &= a''(r)b(\varphi),\\
\partial_\varphi v(r,\varphi) &= a(r)b'(\varphi),\\
\partial_{\varphi\varphi} v(r,\varphi) &= a(r)b''(\varphi).
\end{aligned}
$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen: Laut Aufgabe 2. erhalten wir und setzen gleich den Ansatz ein:

$$
\begin{aligned}
0 = \Delta u(x,y) &= \partial_{rr} v(r,\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} v(r,\varphi)\\
&= a''(r)b(\varphi) + \frac{1}{r}a'(r)b(\varphi) + \frac{1}{r^2}a(r)b''(\varphi) \text{ für } r > 1,\ \varphi \in [0, 2\pi]\\
\Leftrightarrow\ -\frac{1}{r^2}a(r)b''(\varphi) &= \left(a''(r) + \frac{1}{r}a'(r)\right)b(\varphi)\\
\Leftrightarrow\ -\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} &= r^2\frac{a''(r)}{a(r)} + r\frac{a'(r)}{a(r)},\\
v(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = u(x,y) &= x = \cos(\varphi),\\
b(0) &= b(2\pi),\\
b'(0) &= b'(2\pi).
\end{aligned}
$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle r, φ gelten muss, müssen die beiden Seiten

$$-\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} \text{ und } r^2\frac{a''(r)}{a(r)} + r\frac{a'(r)}{a(r)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.

$$-\frac{b''(\varphi)}{b(\varphi)} = \lambda^2 = r^2\frac{a''(r)}{a(r)} + r\frac{a'(r)}{a(r)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} b''(\varphi) &= -\lambda^2 b(\varphi), \\ r^2a''(r) + ra'(r) - \lambda^2 a(r) &= 0. \end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu b: Umgestellt bekommen wir

$$b''(\varphi) + \lambda^2 b(\varphi) = 0.$$

Das dazugehörende charakteristische Polynom lautet

$$p(\mu) = \mu^2 + \lambda^2 = (\mu + \mathrm{i}\lambda)(\mu - \mathrm{i}\lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\mathrm{i}\lambda$. Die Lösung zu b lautet nun

$$b^{(\lambda)}(\varphi) = C_{1,1}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\varphi} + C_{1,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi},$$

falls $\lambda \neq 0$ ist, sonst ($\lambda = 0$)

$$b(\varphi) = C_{1,1}^{(0)} + C_{1,2}^{(0)}\varphi.$$

Lösung zu a: Dies ist eine Euler-Differentialgleichung, dazu setzen wir $r = \mathrm{e}^t$ und $z(t) = a(\mathrm{e}^t)$. Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{aligned} z'(t) &= \mathrm{e}^t a'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ z''(t) &= \mathrm{e}^t a'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t}a''\left(\mathrm{e}^t\right) = z'(t) + \mathrm{e}^{2t}a''\left(\mathrm{e}^t\right) \\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2t}a''\left(\mathrm{e}^t\right) &= z''(t) - z'(t). \end{aligned}$$

Dann folgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= r^2a''(r) + ra'(r) - \lambda^2 a(r) = \mathrm{e}^{2t}a''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t a'\left(\mathrm{e}^t\right) - \lambda^2 a\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= (z''(t) - z'(t)) + z'(t) - \lambda^2 z(t) = z''(t) - \lambda^2 z(t). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom zur Differentialgleichung von z lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda),$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Also lautet die Lösung zu z

$$z^{(\lambda)}(t) = C_{2,1}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda t} + C_{2,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

falls $\lambda \neq 0$, sonst ($\lambda = 0$)

$$z^{(0)}(t) = C_{2,1}^{(0)} + C_{2,2}^{(0)}t.$$

Resubstituieren $t = \log(r)$ liefert nun

$$\begin{aligned} a^{(\lambda)}(r) = z^{(\lambda)}(\log(r)) &= C_{2,1}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda\log(r)} + C_{2,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda\log(r)} \\ &= C_{2,1}^{(\lambda)}r^{-\lambda} + C_{2,2}^{(\lambda)}r^{\lambda}, \end{aligned}$$

falls $\lambda \neq 0$ ist, sonst ($\lambda = 0$)

$$a^{(0)}(r) = z^{(0)}(\log(r)) = C_{2,1}^{(0)} + C_{2,2}^{(0)}\log(r).$$

Schritt 4. Randdaten beachten: Im Fall $\lambda = 0$ liefert

$$\begin{aligned} C_{1,1}^{(0)} = b^{(0)}(0) &= b^{(0)}(2\pi) = C_{1,1}^{(0)} + 2C_{1,2}^{(0)}\pi \\ \Leftrightarrow\ C_{1,2}^{(0)} &= 0, \end{aligned}$$

$$b'^{(0)}(0) = C_{1,2}^{(0)} = b'^{(0)}(2\pi),$$

d.h.

$$b^{(0)}(\varphi) = C_{1,1}^{(0)}.$$

Dann ist

$$v^{(0)}(r,\varphi) = a^{(0)}(r)b^{(0)}(\varphi) = C_{1,1}^{(0)}\left(C_{2,1}^{(0)} + C_{2,2}^{(0)}\log(r)\right) =: C_1^{(0)} + C_2^{(0)}\log(r).$$

Für $\lambda \neq 0$ liefern die Randbedingungen durch Addition beider Gleichungen

$$\begin{aligned}
C_{1,1}^{(\lambda)} + C_{1,2}^{(\lambda)} &= b^{(\lambda)}(0) = b^{(\lambda)}(2\pi) = C_{1,1}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\lambda} + C_{1,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda},\\
-\mathrm{i}\lambda C_{1,1}^{(\lambda)} + \mathrm{i}\lambda C_{1,2}^{(\lambda)} &= b'^{(\lambda)}(0) = b'^{(\lambda)}(2\pi) = -\mathrm{i}\lambda C_{1,1}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\lambda} + \mathrm{i}\lambda C_{1,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}\\
\Leftrightarrow\ -C_{1,1}^{(\lambda)} + C_{1,2}^{(\lambda)} &= b^{(\lambda)}(0) = b^{(\lambda)}(2\pi) = -C_{1,1}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\lambda} + C_{1,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}\\
\Rightarrow\ 2C_{1,2}^{(\lambda)} &= 2C_{1,2}^{(\lambda)}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda}\\
\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\lambda} &= 1\\
\Leftrightarrow\ \lambda &= k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

So lautet nun

$$\begin{aligned}
v^{(k)}(r,\varphi) = a^{(k)}(r)b^{(k)}(\varphi) &= \left(C_{2,1}^{(k)}r^{-k} + C_{2,2}^{(k)}r^k\right)\left(C_{1,1}^{(k)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + C_{1,2}^{(k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}\right)\\
&= C_1^{(k)}r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + C_2^{(k)}r^{-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} + C_3^{(k)}r^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + C_4^{(k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}.
\end{aligned}$$

Die Terme $(r,\varphi) \mapsto \log(r)$, $(r,\varphi) \mapsto r^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi}$ und $(r,\varphi) \mapsto r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}$ sind auf der Menge $[1,\infty) \times [0,2\pi]$ unbeschränkt, daher muss

$$C_2^{(0)} = C_3^{(k)} = C_4^{(k)} = 0$$

gelten, also gilt:

$$\begin{aligned}
v^{(0)}(r,\varphi) &= C_1^{(0)},\\
v^{(k)}(r,\varphi) &= C_1^{(k)}r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + C_2^{(k)}r^{-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}.
\end{aligned}$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung v_N aufstellen: Sei $N \in \mathbb{N}$. Die (komplexwertige) Lösung v_N lautet nun:

$$\begin{aligned}
v_N(r,\varphi) &= v^{(0)}(r,\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(r,\varphi)\\
&= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_1^{(k)}r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + C_2^{(k)}r^{-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}\right)
\end{aligned}$$

für alle $r \geq 1$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und Konstanten $C_1^{(0)}, C_2^{(0)} \in \mathbb{C}$ und $C_1^{(k)}, C_2^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1,\dots,N\}$. Die (reellwertige) Lösung v_N lautet nun:

$$v_N(r,\varphi) = \widetilde{C}_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\widetilde{C}_1^{(k)}r^{-k}\sin(k\varphi) + \widetilde{C}_2^{(k)}r^{-k}\cos(k\varphi)\right).$$

für alle $r \geq 1$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und Konstanten $\widetilde{C}_1^{(0)}, \widetilde{C}_2^{(0)} \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{C}_1^{(k)}, \widetilde{C}_2^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1,\dots,N\}$.
Schritt 6. Spezielle Lösung v aufstellen: Die Anfangsbedingung liefert uns nun

$$\cos(\varphi) = v(1,\varphi) = C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_1^{(k)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + C_2^{(k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}\right),$$

dass $C_1^{(0)} = 0$, $N = 1$ und $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = \frac{1}{2}$. Also folgt lautet die Lösung v nun

$$v(r,\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{r}.$$

Schritt 7. Rücksubstituieren: Dies liefert nun die Lösung u:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

für alle $(x,y) \in \overline{\Omega}$. $\square$