14.10.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Höhere Mathematik III für Physik

1. Tutoriumsblatt
(wird im Zeitraum 21.10. bis 01.11.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Grundverständnis Differentialgleichungen/ Anfangswertprobleme)

(1) Zeigen Sie, dass y eine Lösung der dazugehörigen Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist:

$$y' = 2xy + 1; \qquad y(x) = C\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s \text{ für } x \in (-\infty, \infty) =: I.$$

(2) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

die konstante Nulllösung $y_\infty \equiv 0$ auf $I := [0, \infty)$ und für jedes $\lambda \geq 0$ die Lösung

$$y_\lambda(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \in [0, \lambda] \\ \frac{1}{4}(x - \lambda)^2 \text{ für } x \in (\lambda, \infty) \end{cases} \qquad \text{auf } I \text{ hat.}$$

Was schließen Sie daraus?

Aufgabe 2 (Anfangswertprobleme lösen)

Charakterisieren Sie stets den Typ der vorliegenden Differentialgleichung und lösen Sie anschließend das zu Grunde liegende Anfangswertproblem auf einem möglichst geeigneten Intervall I.

(1) $y' = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x-y^2}$, $y(-\log(2)) = 0$.

(2) $y^3 - x^2 + xy^2y' = 0$, $y(1) = 1$.

(3) $y' = \frac{x-4xy}{1+x^2}$, $y(1) = 1$.

(4) $y' = x\left(y + y^2\right)$, $y(0) = 1$.

Aufgabe 3 (Logistisches Wachstum und Mundpropaganda)

(1) Seien $a, b > 0$ zwei konstante Größen und $y_0 > 0$ der Startwert. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = ay - by^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Um was für einen Differentialgleichungstyp handelt es sich hier? Leiten Sie anschließend eine allgemeine Lösungsformel dafür her.

(2) Haben wir nun eine menschliche Population von der Größe $N \in \mathbb{N}$ gegeben und genau eine Person will ein Gerücht in dieser Population verbreiten. Dann können wir dies mit Hilfe der Differentialgleichung aus (1) modellieren. Wir setzen als $I(t)$ die Anzahl der Menschen, die zur Zeit $t \geq 0$ das Gerücht bereits kennen und $k > 0$ sei die Anzahl der Begegnungen, die jede Person, die das Gerücht kennt in der Population hat und sofort das Gerücht weitererzählt. Nun lautet die Differentialgleichung dazu:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = I(t)\frac{N - I(t)}{N}k.$$

Was ist eine geeignete Startbedingung $I(0)$ hier? Was sagen die Quotienten

$$\frac{N - I(t)}{N} \text{ und } \frac{N - I(t)}{N}k$$

für $t > 0$ aus? Lösen Sie anschließend mit Hilfe von (1) das Anfangswertproblem. Was passiert mit $I(t)$ für $t \to \infty$? Ist dieses Modell realistisch?

Hinweise:

- Die Tutorien beginnen schon am 21.10.2019. Die genauen Uhrzeiten der Tutorien sind:

  (A) Montag, 11.30 Uhr bis 13.00 Uhr im Seminarraum 0.014.

  (B) Mittwoch, 11.30 Uhr bis 13.00 Uhr im Seminarraum 3.061.

  (C) Freitag, 11.30 Uhr bis 13.00 Uhr im Seminarraum -1.015.

  Alle Tutorien finden im Mathematikgebäude 20.30 statt. Die Tutorien finden jede Woche statt, allerdings gibt es nur alle zwei Wochen ein neues Tutoriumsblatt, daher auch der Zeitraum, d.h. nur alle zwei Wochen ist ein wirklich neues Tutorium.

- Die Einteilung in die Tutorien findet nach eigenem Ermessen statt, d.h. die Studierenden können in die Tutorien gehen, die Ihnen zeitlich am besten passen. Sollte ein Termin überlaufen sein, dann bietet es sich an in ein anderes zu gehen oder die Woche drauf zum selben Zeitpunkt es erneut zu versuchen.

- Sollte es Fragen und/ oder Probleme geben bei der Wahl der Tutorien, der Übung oder der Aufgaben, dann wenden Sie sich bitte an Michael Ullmann (michael.ullmann@kit.edu; Büro 2.033/ 2.034).

- Die erste Übung ist am Freitag, den 25.10.2019 um 14.00 Uhr bis 15.30 Uhr im **Daimler-Hörsaal (10.21)** und danach in etwa alle zwei Wochen. Die genauen Termine zur Vorlesung, Übung und Tutorium werden auf der Internetseite der Veranstaltung bekanntgegeben.

- Im Tutorium sollen die Studierenden die Aufgaben unter Hilfestellung lösen, dabei orientieren sich die Tutoriumsaufgaben stets stark an den Aufgaben aus der Übung. Es werden eventuell so nur teilweise Lösungen besprochen, allerdings wird es Lösungsvorschläge zu allen Aufgaben (Übung und Tutorium) online auf der Homepage geben.

- Die schriftliche Klausur findet am Freitag, den 28.02.2020 von 08.00 bis 10.00 Uhr statt.

- Die Internetadresse zur Internetseite der Veranstaltung lautet:

  `www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2019w/`