14.10.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Grundverständnis Differentialgleichungen/ Anfangswertprobleme)

(1) Zeigen Sie, dass y eine Lösung der dazugehörigen Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist:

$$y' = 2xy + 1; \qquad y(x) = C\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{x^2} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s \text{ für } x \in (-\infty, \infty) =: I,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

(2) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

die konstante Nulllösung $y_\infty \equiv 0$ auf $I := [0, \infty)$ und für jedes $\lambda \geq 0$ die Lösung

$$y_\lambda(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \in [0, \lambda] \\ \frac{1}{4}(x-\lambda)^2 \text{ für } x \in (\lambda, \infty) \end{cases} \qquad \text{auf } I \text{ hat.}$$

Was schließen Sie daraus?

Lösung von Aufgabe 1

(1) Zu zeigen ist, dass die angegebene Funktion y einmal stetig-differenzierbar (da es sich hier um eine Differentialgleichung erster Ordnung handelt) ist auf I und die Differentialgleichung löst.
Wir setzen die drei Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{x^2},$$
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2},$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s.$$

Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s = \int\limits_0^x h(s) \mathrm{d}s.$$

Weiter sind die beiden Funktionen f und h glatte Funktionen auf $\mathbb{R}$, und glatte Funktionen sind stets beliebig oft differenzierbar, d.h. insbesondere ist die Funktion f einmal stetig-differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

und die Funktion h stetig auf $\mathbb{R}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist somit auch die Integralfunktion g stetig-differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit der Ableitung (erneut nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$g'(x) = h(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Also gilt für die Funktion y, dass

$$\begin{aligned} y(x) &= C\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{x^2} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s \\ &= Cf(x) + f(x)g(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Also ist y als Komposition von einmal stetig-differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ wieder einmal stetig-differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit der Ableitung nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} y'(x) &= Cf'(x) + [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] \\ &= 2Cx\mathrm{e}^{x^2} + 2x\mathrm{e}^{x^2} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 2x \left[C\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{x^2} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s \right] + 1 \\ &= 2xy(x) + 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in (-\infty, \infty) = I$. Also löst y die obige Differentialgleichung. $\square$

Bemerkung: Das Integral $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$ ist nicht elementar berechenbar.

(2) Sei $\lambda \geq 0$ beliebig. Zu zeigen ist, dass die Funktionen y_∞ und y_λ einmal stetig-differenzierbar (da es sich hierbei um eine Differentialgleichung erster Ordnung handelt) sind auf I und sie das Anfangswertproblem lösen.

$\underline{y_\infty \in C^1([0,\infty)) \text{ und die Ableitung von } y_\infty}$: Die Nullfunktion y_∞ ist eine glatte Funktion auf $(0,\infty)$ und glatte Funktionen sind beliebig oft stetig-differenzierbar, d.h. insbesondere auch einmal stetig-differenzierbar. Demnach ist die Nullfunktion y_∞ stetig-differenzierbar auf $(0,\infty)$ als glatte Funktion auf $(0,\infty)$. Die Funktion y_∞ hat demnach die Ableitung:

$$y'_\infty(x) = 0 \text{ für alle } x \in (0,\infty)\,.$$

Weiter ist die Funktion y_∞ stetig im Ursprung, d.h. $y_\infty \in C^0([0,\infty))$ und daher ist $y_\infty \in C^1([0,\infty))$.

$\underline{y_\lambda \in C^1([0,\infty)) \text{ und die Ableitung von } y_\lambda}$: Die Funktion y_λ ist eingeschränkt auf das Intervall $I_1 := [0,\lambda]$ gerade konstant null und wie wir oben im Fall von y_∞ gesehen haben somit einmal stetig-differenzierbar auf $(0,\lambda)$ als glatte Funktion auf $(0,\lambda)$ mit der Ableitung

$$y'_\lambda(x) = 0 \text{ für alle } x \in (0,\lambda)\,.$$

Weiter ist die Einschränkung $y_\lambda|_{[0,\lambda]}$ auch stetig im Ursprung und in $x = \lambda$ mit $y(\lambda) = 0$, d.h. $y_\lambda|_{[0,\lambda]} \in C^0([0,\lambda])$.
Die Funktion y_λ ist eingeschränkt auf dem Intervall $I_2 := (\lambda,\infty)$ als Komposition glatter Funktionen auf (λ,∞) wieder selber glatt auf (λ,∞). Weiter sind glatte Funktionen beliebig oft stetig-differenzierbar, also insbesondere auch einmal. Damit ist die Einschränkung $y_\lambda|_{(\lambda,\infty)}$ als glatte Funktion auf (λ,∞) einmal stetig-differenzierbar auf (λ,∞) mit der Ableitung

$$y'(x) = \frac{2}{4}(x-\lambda)\cdot(1-0) = \frac{1}{2}(x-\lambda)\cdot 1 = \frac{1}{2}(x-\lambda)$$

laut der Kettenregel für alle $x \in (\lambda,\infty)$. Weiter ist so auch die Einschränkung $y_\lambda|_{(\lambda,\infty)}$ stetig auf (λ,∞). Es gilt zudem:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\lambda^+} y_\lambda(x) = \lim_{x\to\lambda^+} \frac{1}{4}(x-\lambda)^2 = \frac{1}{4}(\lambda-\lambda)^2 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0 = y_\lambda(\lambda), \\ &\lim_{x\to\lambda^-} y_\lambda(x)' = \lim_{x\to\lambda^-} 0 = 0, \\ &\lim_{x\to\lambda^+} y_\lambda(x)' = \lim_{x\to\lambda^+} \frac{1}{2}(x-\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda-\lambda) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 = \lim_{x\to\lambda^-} y'_\lambda(x), \end{aligned}$$

d.h. die Funktionen y_λ und y'_λ sind auf $(0,\infty)$ stetig. Wegen $I_1 \cup I_2 = I$ ist die Funktion y_λ auf $(0,\infty)$ stetig-differenzierbar mit der Ableitung

$$y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \in (0,\lambda] \\ \frac{1}{2}(x-\lambda) \text{ für } x \in (\lambda,\infty) \end{cases}$$

für $x \in (0,\infty)$ und die Funktion y_λ ist stetig auf $[0,\infty)$. Also ist die Funktion $y_\lambda \in C^1([0,\infty))$.

$\underline{y_\infty \text{ und } y_\lambda \text{ lösen das Anfangswertproblem}}$: Setzen wir nun dies in die obige Differentialgleichung ein, erhalten wir für $x \in (0,\lambda]$

$$\begin{aligned} \sqrt{y_\infty(x)} &= \sqrt{0} = 0 = y'_\infty(x), \\ \sqrt{y_\lambda(x)} &= \sqrt{0} = 0 = y'_\lambda(x) \end{aligned}$$

und für $x \in (\lambda, \infty)$

$$\sqrt{y_\infty(x)} = \sqrt{0} = 0 = y'_\infty(x),$$
$$\sqrt{y_\lambda(x)} = \sqrt{\frac{1}{4}(x-\lambda)^2} = \frac{1}{2}|x-\lambda| = \frac{1}{2}(x-\lambda) = y'_\lambda(x),$$

da in diesem Fall $x > \lambda$ und so $x-\lambda > 0$ ist. Damit erfüllen die Funktionen y_∞ und y_λ auf (λ, ∞) die Differentialgleichung. Weiter ist $0 \in [0, \infty)$ und es gilt dafür:

$$y_\infty(0) = 0,$$
$$y_\lambda(0) = 0.$$

Damit erfüllen die Funktionen y_∞ und y_λ die Anfangsbedingung. Also lösen die beiden Funktionen y_∞ und y_λ dasselbe Anfangswertproblem, aber es gilt z.B. für $x = \lambda + 1 \in [0, \infty)$:

$$y_\lambda(\lambda+1) = \frac{1}{4}(\lambda+1-\lambda)^2 = \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4} \neq 0 = y_\infty(\lambda+1),$$

d.h. $y_\lambda \neq y_\infty$ auf $(0, \infty)$. Das Anfangswertproblem ist nicht eindeutig lösbar, es hat sogar beliebig viele Lösungen. $\square$

Bemerkung: Nicht-eindeutige Anfangswertprobleme können auch nur endlich viele Lösungen haben, wie wir später feststellen werden.

Aufgabe 2 (Anfangswertprobleme lösen)

Charakterisieren Sie stets den Typ der vorliegenden Differentialgleichung und lösen Sie anschließend das zu Grunde liegende Anfangswertproblem auf einem möglichst geeigneten Intervall I.

(1) $y' = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x-y^2},\ y(-\log(2)) = 0.$

(2) $y^3 - x^2 + xy^2y' = 0,\ y(1) = 1.$

(3) $y' = \frac{x-4xy}{1+x^2},\ y(1) = 1.$

(4) $y' = x\left(y + y^2\right),\ y(0) = 1.$

Lösung von Aufgabe 2

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Diese hat keinen speziellen Typ, wir können aber sagen, dass es eine nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen ist, denn wir können diese schreiben als

$$y' = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x-y^2} = \mathrm{e}^x \cdot \frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{y} = f(x)\cdot g(y)$$

mit den Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{e}^x \text{ und } g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ y\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{y}.$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Trennung der Variablen: Wir haben nun

$$y' = f(x)\cdot g(y),$$

also muss

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$ gelten.

Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{y}} = y\mathrm{e}^{y^2}.$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int 2y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}$$

und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + C = \mathrm{e}^x + C$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y(x)^2} &= \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C = \mathrm{e}^x + C\\ &\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{y(x)^2} = 2\left(\mathrm{e}^x + C\right) = 2\mathrm{e}^x + 2C\\ &\Leftrightarrow\ y(x)^2 = \log\left(2\mathrm{e}^x + 2C\right)\\ &\Leftrightarrow\ y(x) = \pm\sqrt{\log\left(2\mathrm{e}^x + 2C\right)}.\end{aligned}$$

Demnach lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1):

$$y(x) = \pm\sqrt{\log\left(2\mathrm{e}^x + 2C\right)}$$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ so, dass $2\mathrm{e}^x + 2C > 0$ mit $\log\left(2\mathrm{e}^x + 2C\right) \geq 0$.

Lösen des Anfangswertproblems:

Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(-\log(2)) = 0$ muss nun gelten:

$$0 = y(-\log(2)) = \pm\sqrt{\log\left(2\mathrm{e}^{-\log(2)} + 2C\right)} = \pm\sqrt{\log\left(2\cdot\frac{1}{2} + 2C\right)} = \pm\sqrt{\log\left(1 + 2C\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 0 = \sqrt{\log(1+2C)} \\
&\Leftrightarrow\ 0 = \log(1+2C) \\
&\Leftrightarrow\ 1 = 1+2C \\
&\Leftrightarrow\ 0 = 2C \\
&\Leftrightarrow\ C = 0,
\end{aligned}
$$

d.h. die Lösungen zum Anfangswertproblem (1) lauten:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \pm\sqrt{\log(2\mathrm{e}^x + 2C)} = \pm\sqrt{\log(2\mathrm{e}^x + 2\cdot 0)} = \pm\sqrt{\log(2\mathrm{e}^x + 0)} = \pm\sqrt{\log(2\mathrm{e}^x)} \\
&= \pm\sqrt{\log(2) + \log(\mathrm{e}^x)} = \pm\sqrt{\log(2) + x}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in [-\log(2), \infty) =: I$. $\square$

Bemerkung: Hier haben wir nun gesehen, dass wir exakt zwei verschiedene Lösungen vom selben Anfangswertproblem haben.

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Wir können die Differentialgleichung äquivalent umformen durch

$$
\begin{aligned}
&y^3 - x^2 + xy^2y' = 0 \\
\Leftrightarrow\ \frac{1}{x}y - xy^{-2} + y' = \frac{y^3}{xy^2} - \frac{x^2}{xy^2} + \frac{xy^2y'}{xy^2} &= \frac{0}{xy^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ y' = -\frac{1}{x}y + xy^{-2}.
\end{aligned}
$$

Dies ist eine homogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = -2$.

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := y^{1-n} = y^{1-(-2)} = y^{1+2} = y^3.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = 3y^2 \cdot y' = 3y^2y'.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für y' folgt nun:

$$z' = 3y^2y' = 3y^2\left[-\frac{1}{x}y + xy^{-2}\right] = 3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}y\right) + 3y^2 \cdot \left(xy^{-2}\right) = -\frac{3}{x}y^3 + 3x = -\frac{3}{x}z + 3x.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$(2')\ z' = -\frac{3}{x}z + 3x.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichung (2) und (2') sind äquivalent.

Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung zu (2'): Die homogene Differentialgleichung zu (2') lautet

$$z_{\mathrm{h}}' = -\frac{3}{x}z_{\mathrm{h}}.$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3}{x}\mathrm{d}x = -3\log(|x|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Die Lösung z_{h} vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{\int -\frac{3}{x}\mathrm{d}x} = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-3\log(|x|)} = C_{\mathrm{h}}|x|^{-3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung zu (2'): Motiviert durch die Lösung z_{h} der homogenen Differentialgleichung zu (2') machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_{\mathrm{p}}(x) = C(x)|x|^{-3}$$

für eine Funktion C und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung (2') ein. Wir haben für die Ableitung von z_{p} nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_{\mathrm{p}}'(x) = C'(x)|x|^{-3} + C(x) \cdot \frac{-3\operatorname{sign}(x)}{|x|^4} = C'(x)|x|^{-3} - \frac{3\operatorname{sign}(x)}{|x|} \cdot \left[C(x)|x|^{-3}\right]$$

$$= C'(x)|x|^{-3} - \frac{3}{\operatorname{sign}(x)|x|} z_{\mathrm{p}}(x) = C'(x)|x|^{-3} - \frac{3}{x} z_{\mathrm{p}}(x),$$

wobei sign: $\mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion ist, d.h.

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0, \\ 0 \text{ für } x = 0, \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

und die Ableitung der Betragsfunktion ist für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gerade:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} |\cdot| (x) = \operatorname{sign}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (2'):

$$\begin{aligned} C'(x)|x|^{-3} - \frac{3}{x} z_{\mathrm{p}}(x) = z_{\mathrm{p}}'(x) = -\frac{3}{x} z_{\mathrm{p}}(x) + 3x \\ \Leftrightarrow \ C'(x)|x|^{-3} = 3x \\ \Leftrightarrow \ C'(x) = 3x|x|^3. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x C'(s)\mathrm{d}s = \int_0^x 3s|s|^3\mathrm{d}s = \int_0^x 3s \cdot s^3\mathrm{d}s = \int_0^x 3s^4\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{3}{5}s^5\right]_0^x = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{5} \cdot 0^5 = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{5} \cdot 0 = \frac{3}{5}x^5 - 0 = \frac{3}{5}x^5 = \frac{3}{5}|x|^5 \end{aligned}$$

bzw. für $x < 0$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x C'(s)\mathrm{d}s = \int_0^x 3s|s|^3\mathrm{d}s = \int_0^x 3s \cdot (-s)^3 \, \mathrm{d}s = \int_0^x -3s^4\mathrm{d}s \\ &= \left[-\frac{3}{5}s^5\right]_0^x = -\frac{3}{5}x^5 - \left(-\frac{3}{5} \cdot 0^5\right) = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{5} \cdot 0 = -\frac{3}{5}x^5 + 0 = -\frac{3}{5}x^5 = \frac{3}{5}|x|^5. \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt für C:

$$C(x) = \frac{3}{5}|x|^5 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (2'):

$$z_{\mathrm{p}}(x) = C(x)|x|^{-3} = \frac{3}{5}|x|^5 \cdot |x|^{-3} = \frac{3}{5}|x|^2 = \frac{3}{5}x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2') lautet nun

$$z(x) = z_{\mathrm{p}}(x) + z_{\mathrm{h}}(x) = \frac{3}{5}x^2 + C_{\mathrm{h}}|x|^{-3}$$

für eine Konstante $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Schritt 4. Rücksubstitution zur Lösung der Differentialgleichung (2): Es gilt:

$$z(x) = y(x)^3 \ \Leftrightarrow \ y(x) = \sqrt[3]{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) (per Rücksubstitution):

$$y(x) = \sqrt[3]{z(x)} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^2 + C_{\mathrm{h}}|x|^{-3}}$$

für eine Konstante $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Lösen des Anfangswertproblems:

Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (2): Für die Lösung des Anfangswertproblems (2) muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$1 = y(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot 1^2 + C_{\mathrm{h}}|1|^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5} \cdot 1 + C_{\mathrm{h}} \cdot 1^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5} + C_{\mathrm{h}} \cdot 1} = \sqrt[3]{\frac{3}{5} + C_{\mathrm{h}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 1 = \frac{3}{5} + C_{\mathrm{h}} \\
&\Leftrightarrow\ C_{\mathrm{h}} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

Damit lautet wegen $1 \in (0,\infty)$ die Lösung vom Anfangswertproblem (2):

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^2 + C_{\mathrm{h}}|x|^{-3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^{-3}}$$

für alle $x \in (0,\infty) =: I$. □

Bemerkung: Wir können hier auch nach Schritt 3. die Anfangsbedingung einsetzen um das Anfangswertproblem zu lösen, da gelten muss:

$$z(1) = y(1)^3 = 1^3 = 1.$$

Damit erhalten wir nun:

$$
\begin{aligned}
1 = z(1) &= \frac{3}{5}\cdot 1^2 + C_{\mathrm{h}}|1|^{-3} = \frac{3}{5}\cdot 1 + C_{\mathrm{h}}\cdot 1^{-3} = \frac{3}{5} + C_{\mathrm{h}}\cdot 1 = \frac{3}{5} + C_{\mathrm{h}} \\
\Leftrightarrow\ C_{\mathrm{h}} &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

Also muss z lauten:

$$z(x) = \frac{3}{5}x^2 + C_{\mathrm{h}}|x|^{-3} = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^{-3}$$

für alle $x \in (0,\infty)$, da $1 \in (0,\infty)$ ist.
Und per Rücksubstitution erhalten wir nun für alle $x \in (0,\infty) =: I$:

$$
\begin{aligned}
y^3(x) = z(x) &= \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^{-3} \\
\Leftrightarrow\ y(x) &= \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^{-3}}.
\end{aligned}
$$

Die Lösung vom Anfangswertproblem (2) lautet damit

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^{-3}} \text{ für alle } x \in (0,\infty).$$

□

Dieser alternative Lösungsweg wäre genauso richtig gewesen.
(3) **1. Variante**: <u>Typ der Differentialgleichung</u>: Wir können die Differentialgleichung (3) äquivalent umformen zu

$$y' = \frac{x - 4xy}{1+x^2} = \frac{-4x}{1+x^2}y + \frac{x}{1+x^2}.$$

Also haben wir hier eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung vorliegen.
<u>Lösen der Differentialgleichung</u>:
Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung: Die homogene Differentialgleichung zu (3) lautet

$$y_{\mathrm{h}}(x) = \frac{-4x}{1+x^2}y_{\mathrm{h}}(x).$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int \frac{-4x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -2\int \frac{2x}{1+x^2} = -2\log\left(\left|1+x^2\right|\right) = -2\log\left(1+x^2\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, da $1 + x^2 > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung y_{h} vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{\int \frac{-4x}{1+x^2}\mathrm{d}x} = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-2\log\left(1+x^2\right)} = \frac{C_{\mathrm{h}}}{\left(1+x^2\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung zu (3):
Motiviert durch die Lösung y_{h} der homogenen Differentialgleichung zu (3) machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y_{\mathrm{p}}(t) = \frac{C(x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

für eine Funktion C und setzen diesen in die inhomogene Differentialgleichung (3) ein. Wir haben für die Ableitung von y_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'(t) &= \frac{C'(x)}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{-4xC(x)}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{C'(x)}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{4x}{1+x^2} \cdot \frac{C(x)}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{C'(x)}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{4x}{1+x^2} y_\mathrm{p}(x). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{4x}{1+x^2} y_\mathrm{p}(x) = y_\mathrm{p}'(x) &= \frac{-4x}{1+x^2} y_\mathrm{p} + \frac{x}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{C'(x)}{\left(1+x^2\right)^2} &= \frac{x}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow \quad C'(x) &= x\left(1+x^2\right) = x + x^3. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \left(s+s^3\right) \mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}s^4\right]_0^x = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot 0^4\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - (0+0) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - 0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \\ &= \frac{x^2}{4}\left(2+x^2\right). \end{aligned}$$

So folgt nun für die partikuläre Lösung:

$$y_\mathrm{p}(x) = \frac{C(x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(2+x^2\right)}{4\left(1+x^2\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (3):

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) lautet nun

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{h}(x) = \frac{x^2\left(2+x^2\right)}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{C_\mathrm{h}}{\left(1+x^2\right)^2}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösen des Anfangswertproblems (3):

Schritt 4. Aufstellen der speziellen Lösung zum Anfangswertproblem (3):

Damit muss für die Lösung des Anfangswertproblems (3) gelten:

$$\begin{aligned} 1 = y(1) &= \frac{1^2 \cdot \left(2+1^2\right)}{4\left(1+1^2\right)^2} + \frac{C_\mathrm{h}}{\left(1+1^2\right)^2} \\ &= \frac{1\cdot(2+1)}{4(1+1)^2} + \frac{C_\mathrm{h}}{(1+1)^2} \\ &= \frac{3}{4\cdot 2^2} + \frac{C_\mathrm{h}}{2^2} \\ &= \frac{3}{4\cdot 4} + \frac{C_\mathrm{h}}{4} = \frac{3}{16} + \frac{C_\mathrm{h}}{4} \\ \Leftrightarrow \quad 16 &= 3 + 4C_\mathrm{h} \\ \Leftrightarrow \quad 13 &= 4C_\mathrm{h} \\ \Leftrightarrow \quad C_\mathrm{h} &= \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung für das Anfangswertproblem (3)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x^2\left(2+x^2\right)}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{C_\mathrm{h}}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{x^2\left(2+x^2\right)}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{13}{4\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^2\left(2+x^2\right)+13}{4\left(1+x^2\right)^2}\\
&= \frac{2x^2+x^4+13}{4\left(1+x^2\right)^2}\\
&= \frac{x^4+2x^2+13}{4\left(1+x^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) =: I$. $\square$

Variante 2.: Typ der Differentialgleichung: Wir können durch Umformen die Differentialgleichung auch als eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen auffassen, wegen:

$$
y' = \frac{x-4xy}{1+x^2} = \frac{x\,(1-4y)}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}\cdot(1-4y) = f(x)\cdot g(y)
$$

mit den Funktionen

$$
f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{x}{1+x^2} \text{ und } g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ y\mapsto 1-4y.
$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Trennung der Variablen: Wir haben nun

$$
y' = f(x)\cdot g(y),
$$

also muss

$$
\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C
$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gelten.

Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$
\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{1-4y}.
$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$
\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int \frac{}{1-4y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\int\frac{-4}{1-4y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\log\left(|1-4y|\right)
$$

und

$$
\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\log\left(\left|1+x^2\right|\right) + C = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$, da $1+x^2>0$ ist für alle $x\in\mathbb{R}$ und

$$
1-4y = 0 \ \Leftrightarrow\ 4y = 1 \ \Leftrightarrow\ y = \frac{1}{4}.
$$

Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\log\left(|1-4y|\right) = \int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y &= \int f(x)\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+C\\
\Leftrightarrow\ \log\left(|1-4y|\right) &= -4\cdot\left[\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+C\right] = -2\log\left(1+x^2\right)-4C\\
\Leftrightarrow\ |1-4y| &= \mathrm{e}^{-2\log\left(1+x^2\right)-4C} = \mathrm{e}^{-2\log\left(1+x^2\right)}\cdot\mathrm{e}^{-4C} = \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Fall 1. $y \le \frac{1}{4}$: Dann ist $4y\le 1$ bzw. $0 \le 1-4y$ und demnach ist $|1-4y| = 1-4y$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
1-4y = |1-4y| &= \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2}\\
\Leftrightarrow\ 1 &= \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2}+4y\\
\Leftrightarrow\ 4y &= 1-\frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2}\\
\Leftrightarrow\ y &= \frac{1}{4}\left[1-\frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2}\right] = \frac{1}{4}-\frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+x^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

und

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+x^2\right)^2} < \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Fall 2. $y > \frac{1}{4}$: Dann ist $4y > 1$ bzw. $1 - 4y < 0$ und demnach ist

$$|1-4y| = -\left(1-4y\right) = -1+4y = 4y-1.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}4y - 1 = |1-4y| &= \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2} \\ \Leftrightarrow\ 4y &= 1 + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2} \\ \Leftrightarrow\ y &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{\left(1+x^2\right)^2}\right] = \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+x^2\right)^2}\end{aligned}$$

und

$$y(x) = \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+x^2\right)^2} > \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Demnach lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3):

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4(1+x^2)^2}, & \text{falls } y \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4(1+x^2)^2}, & \text{falls } y > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Lösen des Anfangswertproblems:
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y\left(1\right) = 1 > \frac{1}{4}$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned}1 = y\left(1\right) &= \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+1^2\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+1\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\cdot 2^2} = \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\cdot 4} = \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{16} \\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{4} &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{16} \\ \Leftrightarrow\ 12 &= 16 \cdot \frac{3}{4} = \mathrm{e}^{-4C}.\end{aligned}$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (3) lautet:

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{-4C}}{4\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{12}{4\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\left(1+x^2\right)^2 + 12}{4\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\left(1 + 2\cdot 1\cdot x^2 + \left(x^2\right)^2\right) + 12}{4\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{1 + 2x^2 + x^4 + 12}{4\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 13}{4\left(1+x^2\right)^2}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) =: I$. □

(4) **1. Variante**: Typ der Differentialgleichung bestimmen: Wir können die Differentialgleichung äquivalent umformen zu

$$y' = x\left(y + y^2\right) = xy + xy^2.$$

Dies ist eine homogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für y' folgt nun:

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{xy + xy^2}{y^2} = -\left(\frac{xy}{y^2} + \frac{xy^2}{y^2}\right) = -\left(\frac{x}{y} + x\right) = -\frac{x}{y} - x = -xz - x.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$(4')\ z' = -xz - x.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichung (4) und (4') sind äquivalent.
Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung zu (4'): Die homogene Differentialgleichung zu (4') lautet

$$z_\mathrm{h}' = -xz_\mathrm{h}.$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int -x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_h vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_\mathrm{h}(x) = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x} = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung zu (4'): Motiviert durch die Lösung z_h der homogenen Differentialgleichung zu (4') machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

für eine Funktion C und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung (4') ein. Wir haben für die Ableitung von z_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + C(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot 2x\right) = C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - xC(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - xz_\mathrm{p}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (4'):

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - xz_\mathrm{p}(x) = z_\mathrm{p}'(x) &= -xz_\mathrm{p}(x) - x \\ \Leftrightarrow\ C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= -x \\ \Leftrightarrow\ C'(x) &= -x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int^x C'(s)\mathrm{d}s = \int^x -s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s^2}\mathrm{d}s = -\int^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s^2}\cdot 2s\mathrm{d}s \\ &= -\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s^2}\right]^x = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (4'):

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (4'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4') lautet nun

$$z(x) = z_\mathrm{p}(x) + z_\mathrm{h}(x) = -1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zur Lösung der Differentialgleichung (4): Es gilt:

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \ \Leftrightarrow\ y(x)z(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ y(x) = \frac{1}{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4) (per Rücksubstitution):

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \neq 0$.
Lösen des Anfangswertproblems:
Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (4): Für die Lösung des Anfangswertproblems (4) muss laut Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} 1 = y(0) &= \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2}} = \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 0}} = \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{0}} = \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}\cdot 1} = \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}} \\ \Leftrightarrow\ -1 + C_\mathrm{h} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ C_\mathrm{h} &= 2. \end{aligned}$$

Damit lautet wegen $0 \in \left(-\sqrt{\log(4)}, \sqrt{\log(4)}\right)$ und wegen

$$\begin{aligned} -1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow\ 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}x^2 &= \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2) \\ \Leftrightarrow\ x^2 &= 2\log(2) = \log\left(2^2\right) = \log(4) \\ \Leftrightarrow\ x &= \pm\sqrt{\log(4)} \end{aligned}$$

die Lösung vom Anfangswertproblem (4):

$$y(x) = \frac{1}{-1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{1}{-1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

für alle $x \in \left(-\sqrt{\log(4)}, \sqrt{\log(4)}\right) =: I$. □

2. Variante: Typ der Differentialgleichung: Wir können die Differentialgleichung auch als eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Veränderlichen auffassen, wegen:

$$y' = x \cdot \left(y + y^2\right) = f(x) \cdot g(y)$$

mit den Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \text{ und } g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ y \mapsto y + y^2.$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Trennung der Variablen: Wir haben nun

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

also muss

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gelten.
Schritt 2. Berechnung der unbestimmten Integrale: Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ laut Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y + y^2} = \frac{1}{y\,(1+y)} = \frac{1}{y} + \frac{-1}{1+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}.$$

Es ergibt sich für die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y - \int \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y = \log\left(|y|\right) - \log\left(|1+y|\right) = \log\left(\frac{|y|}{|1+y|}\right) = \log\left(\left|\frac{y}{1+y}\right|\right)$$

und

$$\int f(x)\mathrm{d}x + C = \int x\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\int 2x\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}x^2 + C$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1\}$, da

$$1 + y = 0 \ \Leftrightarrow\ y = -1$$

ist.
Schritt 3. Auflösen nach y: Es muss gelten:

$$\log\left(\left|\frac{y}{1+y}\right|\right) = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{y}{1+y}\right| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\mathrm{e}^C = \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Fall 1. $y<-1$: Dann ist $y<-1<0$ bzw. $1+y<0$ und demnach ist $|y|=-y$ und $|1+y|=-(1+y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1+y} = \frac{-y}{-(1+y)} = \left|\frac{y}{1+y}\right| &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ y &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\cdot(1+y) = \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y \\
\Leftrightarrow\ \left(1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)y = y - \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ y &= \frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}{1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}.
\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ so, dass $1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\neq 0$ und $y(x)<-1$ ist.
Fall 2. $-1<y<0$: Dann ist $1+y>0$ und demnach ist $|y|=-y$ und $|1+y|=1+y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
-\frac{y}{1+y} = \frac{-y}{1+y} = \left|\frac{y}{1+y}\right| &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ \frac{y}{1+y} &= -\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ y &= -\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\cdot(1+y) = -\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y \\
\Leftrightarrow\ \left(1+\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)y = y + \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= -\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ y &= -\frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}{1+\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}.
\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ so, dass und $y(x)\in(-1,0)$ ist. .
Fall 3. $y>0$: Dann ist $1+y>0$ und demnach ist $|y|=y$ und $|1+y|=1+y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1+y} = \left|\frac{y}{1+y}\right| &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ y &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\cdot(1+y) = \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y \\
\Leftrightarrow\ \left(1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)y = y - \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow\ y &= \frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}{1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}.
\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ so, dass $1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\neq 0$ und $y(x)<-1$ ist.
Demnach lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4):

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}{1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}, & \text{falls } y<-1 \text{ oder } y>0 \text{ und } 1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\neq 0, \\ -\frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}{1+\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}, & \text{falls } y\in(-1,0) \end{cases}$$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$ für alle $x\in\mathbb{R}$.
<u>Lösen des Anfangswertproblems:</u>
Schritt 4. Spezielle Lösung aufstellen: Wegen der Anfangsbedingung $y(0)=1>0$ muss nun gelten:

$$\begin{aligned}
1 = y(0) &= \frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0^2}}{1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0^2}} = \frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0}}{1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0}} = \frac{\mathrm{e}^C\mathrm{e}^0}{1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^0} = \frac{\mathrm{e}^C\cdot 1}{1-\mathrm{e}^C\cdot 1} = \frac{\mathrm{e}^C}{1-\mathrm{e}^C} \\
\Leftrightarrow\ 1-\mathrm{e}^C &= \mathrm{e}^C \\
\Leftrightarrow\ 1 &= 2\mathrm{e}^C \\
\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^C &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und weiter gilt:

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = 1-\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow\ 1 &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\
&\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}x^2 = \log(2) \\
&\Leftrightarrow\ x^2 = 2\log(2) = \log\left(2^2\right) = \log(4) \\
&\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{\log(4)},
\end{aligned}
$$

d.h. die Lösung zum Anfangswertproblem (4) lautet:

$$
y(x) = \frac{1}{-1 + C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{1}{-1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}
$$

für alle $x \in \left(-\sqrt{\log(4)}, \sqrt{\log(4)}\right) =: I$. $\square$

Aufgabe 3 (Logistisches Wachstum und Mundpropaganda)

(1) Seien $a, b > 0$ zwei konstante Größen und $y_0 > 0$ der Startwert. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = ay - by^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Um was für einen Differentialgleichungstyp handelt es sich hier? Leiten Sie anschließend eine allgemeine Lösungsformel dafür her.

(2) Haben wir nun eine menschliche Population von der Größe $N \in \mathbb{N}$ gegeben und genau eine Person will ein Gerücht in dieser Population verbreiten. Dann können wir dies mit Hilfe der Differentialgleichung aus (1) modellieren. Wir setzen als $I(t)$ die Anzahl der Menschen, die zur Zeit $t \geq 0$ das Gerücht bereits kennen und $k > 0$ sei die Anzahl der Begegnungen, die jede Person, die das Gerücht kennt in der Population hat und sofort das Gerücht weitererzählt. Nun lautet die Differentialgleichung dazu:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = I(t)\frac{N - I(t)}{N}k.$$

Was ist eine geeignete Startbedingung $I(0)$ hier? Was sagen die Quotienten

$$\frac{N - I(t)}{N} \text{ und } \frac{N - I(t)}{N}k$$

für $t > 0$ aus? Lösen Sie anschließend mit Hilfe von (1) das Anfangswertproblem. Was passiert mit $I(t)$ für $t \to \infty$? Ist dieses Modell realistisch?

Lösung von Aufgabe 3

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$.

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für y' folgt nun:

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{ay - by^2}{y^2} = -\left(\frac{ay}{y^2} - \frac{by^2}{y^2}\right) = -\left(\frac{a}{y} - b\right) = -\frac{a}{y} + b = -az + b.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$(1')\ z' = -az + b.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichung (1) und (1') sind äquivalent.

Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung zu (1'): Die homogene Differentialgleichung zu (1') lautet

$$z_{\mathrm{h}}' = -az_{\mathrm{h}}.$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int -a\mathrm{d}x = -ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_{h} vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{\int -a\mathrm{d}x} = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-ax}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 2. Herleiten der partikulären Lösung zu (1'): Motiviert durch die Lösung z_h der homogenen Differentialgleichung zu (1') machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-ax}$$

für eine Funktion C und setzen dies in die inhomogene Differentialgleichung (1') ein. Wir haben für die Ableitung von z_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-ax} + C(x) \cdot \left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right) = C'(x)\mathrm{e}^{-ax} - aC(x)\mathrm{e}^{-ax} = C'(x)\mathrm{e}^{-ax} - az_\mathrm{p}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (1'):

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-ax} - az_\mathrm{p}(x) = z_\mathrm{p}'(x) = -az_\mathrm{p}(x) + b \\ \Leftrightarrow\ C'(x)\mathrm{e}^{-ax} = b \\ \Leftrightarrow\ C'(x) = b\mathrm{e}^{ax}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int\limits_{-\infty}^{x} C'(s)\mathrm{d}s = \int\limits_{-\infty}^{x} b\mathrm{e}^{as}\mathrm{d}s = \frac{b}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} a\mathrm{e}^{as}\mathrm{d}s \\ &= \frac{b}{a}\left[\mathrm{e}^{as}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{b}{a}\left(\mathrm{e}^{ax} - 0\right) = \frac{b}{a}\mathrm{e}^{ax}, \end{aligned}$$

da insbesondere $a \neq 0$ ist. Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (1'):

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-ax} = \frac{b}{a}\mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{-ax} = \frac{b}{a}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (1'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1') lautet nun

$$z(x) = z_\mathrm{p}(x) + z_\mathrm{h}(x) = \frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-ax}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution zur Lösung der Differentialgleichung (1): Es gilt:

$$z(x) = \frac{1}{y(x)} \ \Leftrightarrow\ y(x)z(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ y(x) = \frac{1}{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) (per Rücksubstitution):

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-ax}}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-ax} \neq 0$.
Lösen des Anfangswertproblems:
Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (1): Für die Lösung des Anfangswertproblems (1) muss laut Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} y_0 = y(0) = \frac{1}{\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-a\cdot 0}} = \frac{1}{\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{0}} = \frac{1}{\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\cdot 1} = \frac{1}{\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}} \\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\right) y_0 = 1 \\ \Leftrightarrow\ \frac{b}{a} + C_\mathrm{h} = \frac{1}{y_0} \\ \Leftrightarrow\ C_\mathrm{h} = \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Damit lautet wegen $0 \in [0, \infty)$ und wegen

$$\frac{b}{a} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-ax} = \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ax} \geq \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right)\cdot 1 = \frac{b}{a} + \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}$$

$$= \frac{1}{y_0} > 0$$

für alle $x \in [0, \infty)$, da $y_0 > 0$ ist, die Lösung vom Anfangswertproblem (1):

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\frac{b}{a} + C_\mathrm{h} \mathrm{e}^{-ax}} = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-ax}} \\ &= \frac{1}{\frac{b}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{a}{y_0} - b\right) \mathrm{e}^{-ax}} = \frac{1}{\frac{1}{a}\left(b + \left(\frac{a}{y_0} - b\right) \mathrm{e}^{-ax}\right)} \\ &= \frac{a}{b + \left(\frac{a}{y_0} - b\right) \mathrm{e}^{-ax}} \end{aligned}$$

für alle $x \in [0, \infty) =: I$. □

Bemerkung: Wir haben hier nicht das maximale Existenzintervall I gewählt für die Lösung y, aber dieses ist für unsere Zwecke hier ausreichend.

(2) Wir können die Differentialgleichung in (2) umschreiben zu:

$$\begin{aligned} I'(t) = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) &= I(t) \frac{N - I(t)}{N} k = I(t) \left[\frac{N}{N} - \frac{I(t)}{N}\right] k = I(t) \left[1 - \frac{I(t)}{N}\right] k \\ &= kI(t) - \frac{k}{N} I(t)^2 = aI(t) - bI(t)^2 \end{aligned}$$

mit $a := k > 0$ und $b := \frac{k}{N} > 0$, d.h. wir haben eine logistische Differentialgleichung wie sie in (1) vorkam. Ist

$$I(0) = I_0 > 0$$

ein Startwert, so lautet nach (1) die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung aus (2) mit $y_0 := I_0 > 0$:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{a}{b + \left(\frac{a}{y_0} - b\right) \mathrm{e}^{-at}} = \frac{k}{\frac{k}{N} + \left(\frac{k}{I_0} - \frac{k}{N}\right) \mathrm{e}^{-kt}} \\ &= \frac{k}{\frac{k}{N} + \frac{k}{N}\left(\frac{N}{I_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-kt}} = \frac{k}{\frac{k}{N}\left(1 + \left(\frac{N}{I_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-kt}\right)} \\ &= \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{I_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-kt}} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, \infty)$.

Ein guter Startwert I_0 hier ist $I_0 = 1 > 0$, da laut Aufgabenstellung genau eine Person anfängt das Gerücht zu verbreiten. Damit haben wir als Lösung für das Anfangswertproblem aus (2):

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{I_0} - 1\right) \mathrm{e}^{-kt}} = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{1} - 1\right) \mathrm{e}^{-kt}} \\ &= \frac{N}{1 + (N - 1)\, \mathrm{e}^{-kt}} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, \infty)$. Weiter können wir folgendes für $t \in [0, \infty)$ interpretieren:

$q(t) := \frac{N - I(t)}{N}$:	Bruchteil der Nicht-informierten Personen über das Gerücht.
$q(t)k = \frac{N - I(t)}{N} k$:	Jede informierte Person über das Gerücht hat $q(t)k$ Begegnungen mit nicht-informierten Personen bzw. dies ist die Anzahl der neu-informierten Personen.

Weiter haben wir für $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{N}{1 + (N - 1)\, \mathrm{e}^{-kt}} = \frac{N}{1 + 0} = \frac{N}{1} = N.$$

<u>Ist dieses Modell realistisch?</u> Wegen $\lim_{t \to \infty} I(t) = N$ ist dies für große $N \in \mathbb{N}$ nicht realistisch, da es unwahrscheinlich ist, dass von einer Person ausgehend alle Personen in der Population von diesem Gerücht erfahren alleine durch Mundpropaganda. □