29.10.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Ricatti-Differentialgleichung)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$y' = y - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} y^2,\ y(0) = -2.$$

Lösen Sie zuerst die Differentialgleichung allgemein und anschließend das dazugehörige Anfangswertproblem.

Lösung von Aufgabe 1

Typ der Differentialgleichung bestimmen: Dies ist eine inhomogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine inhomogene Ricatti-Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt -1. Lösung erraten und Substitution zur homogenen Riccatti-Differentialgleichung: Wir sehen ein, dass $\widetilde{y}(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung der Differentialgleichung (A1) ist, denn diese ist als Exponentialfunktion stetig-differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit der Ableitung

$$\widetilde{y}'(x) = \mathrm{e}^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

und es gilt:

$$\widetilde{y}(x) - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\widetilde{y}(x)^2 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x = \widetilde{y}'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also existiert eine Lösung der Differentialgleichung (A1). Sei nun y die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (A1). Setze nun

$$u := y - \widetilde{y} = y - \mathrm{e}^x \ \Leftrightarrow\ y = u + \mathrm{e}^x.$$

Dann gilt für die Ableitung von u:

$$u' = (y - \mathrm{e}^x)' = y' - \mathrm{e}^x.$$

Anschließendes Einsetzen in die Differentialgleichung (A1) ergibt nach binomischer Formel

$$\begin{aligned}
u' &= y' = y - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}y^2 - \mathrm{e}^x \\
&= u + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\left(u + \mathrm{e}^x\right) - \mathrm{e}^x = u + \mathrm{e}^{-x}\left(u^2 + 2\mathrm{e}^x u + (\mathrm{e}^x)^2\right) - \mathrm{e}^x \\
&= u + \mathrm{e}^{-x}\left(u^2 + 2\mathrm{e}^x u + \mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^x = u + \mathrm{e}^{-x}u^2 + 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x u + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \\
&= u + 2u + \mathrm{e}^{-x}u^2 + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = 3u + \mathrm{e}^{-x}u^2.
\end{aligned}$$

Also haben wir nun eine Differentialgleichung für u erhalten:

$$(\widetilde{\mathrm{A1}})\ u' = 3u + \mathrm{e}^{-x}u^2.$$

Dies ist eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$ und die beiden Differentialgleichungen (A1) und $(\widetilde{\mathrm{A1}})$ sind äquivalent.
Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := u^{1-n} = u^{1-2} = u^{-1} = \frac{1}{u}.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{u'}{u^2} = -u'u^{-2}.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für u' folgt nun:

$$z' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{3u + \mathrm{e}^{-x}u^2}{u^2} = -\left[\frac{3u}{u^2} + \frac{\mathrm{e}^{-x}u^2}{u^2}\right] = -\left[3 \cdot \frac{1}{u} + \mathrm{e}^{-x}\right] = -3z - \mathrm{e}^{-x}.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$\text{(A1')}\ z' = -3z - \mathrm{e}^{-x}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichungen (A1') und $(\widetilde{\mathrm{A1}})$ sind äquivalent.

Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung zu (A1'): Die homogene Differentialgleichung zu (A1') lautet

$$z_\mathrm{h}'(x) = -3z_\mathrm{h}(x).$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int -3\mathrm{d}x = -3x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_h vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_\mathrm{h}(x) = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{\int -3\mathrm{d}x} = C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-3x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$.

Schritt 2. Herleitung der partikulären Lösung zu (A1'): Motiviert durch die Lösung z_h der homogenen Differentialgleichung zu (A1') machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-3x}$$

für eine Funktion C und setzen die in die inhomogene Differentialgleichung (A1') ein. Wir haben für die Ableitung von z_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-3x} + C(x)\mathrm{e}^{-3x} \cdot (-3) = C'(x)\mathrm{e}^{-3x} - 3 \cdot C(x)\mathrm{e}^{-3x} = C'(x)\mathrm{e}^{-3x} - 3z_\mathrm{p}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung (A1'):

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-3x} - 3z_\mathrm{p}(x) &= z_\mathrm{p}'(x) = -3z_\mathrm{p}(x) - \mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\ C'(x)\mathrm{e}^{-3x} &= -\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\ C'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{3x} = -\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int_{-\infty}^{x} -\mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} 2\mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{2s}\right]_{-\infty}^{x} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}.$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung zu (A1'):

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{-3x} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-3x} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (A1'): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (A1') lautet nun

$$z(x) = z_\mathrm{p}(x) + z_\mathrm{h}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-3x} = \left(C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = \frac{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{x}}$$

mit einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Rücksubstitution zu $(\widetilde{\mathbf{A1}})$: Es gilt:

$$z(x) = \frac{1}{u(x)} \ \Leftrightarrow\ z(x)u(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ u(x) = \frac{1}{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(\widetilde{\mathrm{A1}})$ (per Rücksubstitution):

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{x}}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2} \neq 0.$$

Genauer existiert zu jeder Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ höchstens eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2} = 0.$$

Schritt 5. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (A1): Die allgemeine Lösung der Dfferentialgleichung (A1) lautet

$$\begin{aligned} y(x) = u(x) + \mathrm{e}^x &= \frac{\mathrm{e}^x}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}} + \mathrm{e}^x = \left[\frac{1}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}} + 1\right]\mathrm{e}^x \\ &= \frac{1 + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}\mathrm{e}^x = \frac{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2} \neq 0.$$

Lösen des Anfangswertproblems:

Schritt 6. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (A1): Für die Lösung des Anfangswertproblems (A1) muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$\begin{aligned} -2 = y(0) &= \frac{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2\cdot 0} + \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2\cdot 0} - \frac{1}{2}}\mathrm{e}^0 = \frac{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^0 - \frac{1}{2}} \cdot 1 \\ &= \frac{C_\mathrm{h} \cdot 1 + \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h} \cdot 1 - \frac{1}{2}} = \frac{C_\mathrm{h} + \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h} - \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ -2C_\mathrm{h} + 1 = -2\left(C_\mathrm{h} - \frac{1}{2}\right) &= C_\mathrm{h} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ -2C_\mathrm{h} + \frac{1}{2} &= C_\mathrm{h} \\ \Leftrightarrow\ 3C_\mathrm{h} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ C_\mathrm{h} &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Damit lautet wegen $-\frac{\log(3)}{2} < 0$ und

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-2x} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{-2x} = 3 \\ \Leftrightarrow\ &-2x = \log(3) \\ \Leftrightarrow\ &x = -\frac{\log(3)}{2} \end{aligned}$$

die Lösung vom Anfangswertproblem (A1):

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}}{C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}\mathrm{e}^x = \frac{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}}\mathrm{e}^x \\ &= \frac{\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-2x} + 3\right)}{\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-2x} - 3\right)}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^{-2x} + 3}{\mathrm{e}^{-2x} - 3}\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{\log(3)}{2}, \infty\right) =: I.$ $\square$

Aufgabe 2 (Exakte Differentialgleichung)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$(2x\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}x + \left(x^2\mathrm{e}^y + 1\right)\mathrm{d}y = 0,\ \ y(1) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung exakt ist und lösen Sie anschließend das Anfangsproblem implizit.

Lösung von Aufgabe 2

Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = 2x\mathrm{e}^y - 1,\ \ Q(x,y) = x^2\mathrm{e}^y + 1 \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und $(x_0, y_0) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Die beiden Funktionen P und Q sind stetig-differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ mit der partiellen Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y) &= 2x\mathrm{e}^y,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x,y) &= 2x\mathrm{e}^y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x,y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter ist der Raum $\mathbb{R}^2$ offensichtlich einfach zusammenhängend, also ist laut Vorlesung die Differentialgleichung (A2) exakt.

Dies bedeutet, dass eine stetig-differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ finden so, dass

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.

Schritt 2. Stammfunktion F finden: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von F (also P) bzgl. der ersten Komponente:

$$F(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)\mathrm{d}x = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int (2x\mathrm{e}^y - 1)\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^y - x + C(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} x^2\mathrm{e}^y + 1 = Q(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(x,y) = x^2\mathrm{e}^y + C'(y)\\ \Leftrightarrow\ C'(y) &= 1\\ \Leftrightarrow\ C(y) &= \int 1\mathrm{d}y = y + C\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. können wir $C = 0$ annehmen, d.h. $C(y) = y$ für $y \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion F:

$$F(x,y) = x^2\mathrm{e}^y - x + C(y) = x^2\mathrm{e}^y - x + y,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (A2): Es gilt:

$$Q\left(x_0, y_0\right) = Q\left(1, 0\right) = 1^2\mathrm{e}^0 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

Weiter ist:

$$F\left(x_0, y_0\right) = F\left(0, \sqrt{2}\right) = 1^2 \cdot \mathrm{e}^0 - 1 + 0 = 1 \cdot 1 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Damit existiert ein (offenes) Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = x_0 \in I$ so, dass die Gleichung

$$x^2\mathrm{e}^y - x + y = F(x,y) = F\left(x_0, y_0\right) = F\left(1, 0\right) = 0$$

auf diesem Intervall eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 0$ hat. Diese Lösung y ist damit auch die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (A2).

Allgemein existiert eine eindeutige stetig-differenzierbare Lösung y auf einem Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (A2), wenn

$$x^2\mathrm{e}^{y(x)} - x + y(x) = F\left(x, y(x)\right) = C$$

gilt für alle $x \in I_x$.

Schritt 4. Nach y auflösen??: Wir müssten dazu die Gleichung

$$x^2\mathrm{e}^{y(x)} - x + y(x) = F\left(x, y(x)\right) = F\left(1, 0\right) = 0$$

nach $y(x)$ auflösen. Dies ist aber so einfach nicht möglich, d.h. wir können erstmal keine explizite Darstellung der Lösung y angeben, aber wir wissen, dass diese Lösung existiert und sogar eindeutig ist. $\square$

Aufgabe 3 (Nicht-exakte Differentialgleichungen)

Zeigen Sie stets, dass die angegebene Differentialgleichung nicht-exakt ist und nutzen Sie den Hinweis zum Multiplikator um auf eine äquivalente exakte Differentialgleichung zu kommen. Lösen Sie anschließend das Anfangswertproblem. Geben Sie am Ende die Lösung implizit und, sofern möglich, auch explizit an. Im Falle von einer expliziten Lösung: Was für ein maximales Lösungsintervall können Sie hierbei wählen?

(1) $\cos(x)\mathrm{d}x + (4y\mathrm{e}^{-y} + \sin(x))\,\mathrm{d}y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$.
Hinweis: Finden Sie eine Multiplikator η, der nur von der Variablen y abhängt.

(2) $\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{8y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 1$.
Hinweis: Finden Sie einen Multiplikator η, der nur von der Summe $x^2 + y^2$ abhängt.

Lösung von Aufgabe 3

(1) Wir setzen erstmal

$$P(x, y) = \cos(x) \text{ und } Q(x, y) = 4\mathrm{e}^{-y} + \sin(x)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x, y) = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x, y) = \cos(x)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x, y) = \cos(x)$$
$$\Leftrightarrow\ x = \frac{(2k + 1)}{2}\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \frac{(2k + 1)}{2}\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x, y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (1) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta(y)$ finden, d.h. $\varphi(x, y) = y$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x, y) = 0 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x, y) = 1.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x, y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(x, y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x, y) \cdot P(x, y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x, y) \cdot Q(x, y)} &= \frac{\cos(x) - 0}{1 \cdot \cos(x) - 0 \cdot (4y\mathrm{e}^{-y} + \sin(x))}\\ &= \frac{\cos(x)}{\cos(x)}\\ &= 1 = h(y) = h\left(\varphi(x, y)\right)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(z)\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{z}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x, y)\right) = \mathrm{e}^{y} \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf ganz $\mathbb{R}^2$

$$\widetilde{P}(x, y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x, y)\mathrm{d}y = 0 \quad (1')$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x,y) &= \eta(y)P(x,y)\\ &= \mathrm{e}^{y}\cos(x)\\ \widetilde{Q}(x,y) &= \eta(y)Q(x,y)\\ &= \mathrm{e}^{y}\left(4y\mathrm{e}^{-y}+\sin(x)\right)\\ &= 4y+\mathrm{e}^{y}\sin(x)\end{aligned}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla\widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix}\widetilde{P}(x,y)\\ \widetilde{Q}(x,y)\end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int \widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{y}\cos(x)\mathrm{d}z\\ &= \mathrm{e}^{y}\sin(x)+C(y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}4y+\mathrm{e}^{y}\sin(x) = \widetilde{Q}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x,y)\\ &= \mathrm{e}^{y}\sin(x)+C'(y) \Leftrightarrow\ C'(y)=4y\end{aligned}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, d.h. für die Funktion C folgt nun:

$$C(y) = \int 4y\mathrm{d}y = 2y^2 + C$$

für alle $y\in\mathbb{R}$ und einer Konstanten $C\in\mathbb{R}$. O.B.d.A. wähle wir $C=0$, d.h.

$$C(y) = 2y^2$$

für alle $y\in\mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = \mathrm{e}^{y}\sin(x)+C(y) = \mathrm{e}^{y}\sin(x)+2y^2$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1'): Wegen

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}\left(x_0,y_0\right) &= \widetilde{Q}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 4\cdot\frac{\pi}{2}+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\sin(0) = 2\pi\neq 0\end{aligned}$$

finden wir ein Intervall $I_x\subseteq\mathbb{R}$ mit $0=x_0\in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x\to\mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathrm{e}^{y(x)}\sin(x)+2y(x)^2 = \widetilde{F}(x,y(x)) = \widetilde{F}\left(x_0,y_0\right) = \widetilde{F}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\sin(0)+2\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} \text{ für alle } x\in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (1') und wegen $\eta\neq 0$ auch die Differentialgleichung (1).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$\mathrm{e}^{y(x)}\sin(x)+2y(x)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

nicht explizit nach $y(x)$ auflösen, sondern nur implizit lösen. □
(2) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \text{ und } Q(x,y) = \frac{8y}{1+x^2+y^2}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und weiter $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.
Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) &= \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) &= \frac{-16xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = \frac{-16xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \\ \Leftrightarrow \ & x = 0 \text{ oder } y = 0 \end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y)$$

für alle $(x, y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung (3) ist nicht exakt.
Schritt 2. Eulerscher Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta\left(x^2+y^2\right)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = 2x \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = 2y.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y)\cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y)\cdot Q(x,y)} &= \frac{\frac{-16xy}{(1+x^2+y^2)^2} - \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}}{\frac{4xy}{1+x^2+y^2} - \frac{16xy}{1+x^2+y^2}} \\ &= \frac{-12xy\left(1+x^2+y^2\right)}{-12xy\left(1+x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2+y^2} \\ &= h\left(x^2+y^2\right) = h\left(\varphi(x,y)\right) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(z)\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{\log(|1+z|)} = |1+z|.$$

Damit gilt nun:

$$\eta = \eta\left(\varphi(x,y)\right) = \left|1+x^2+y^2\right| = 1+x^2+y^2 \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf $\mathbb{R}^2$:

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad (2')$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(x,y) &= \eta\left(x^2+y^2\right) P(x,y) \\ &= 2x \\ \widetilde{Q}(x,y) &= \eta\left(x^2+y^2\right) Q(x,y) \\ &= 8y \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktion $\widetilde{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla \widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x,y) \\ \widetilde{Q}(x,y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die x-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{P}$) bzgl. der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x \\ &= x^2 + C(y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$8y = \widetilde{Q}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\widetilde{F}(x,y) = C'(y)$$

d.h. für die Funktion C gilt nun

$$C(y) = \int 8y\mathrm{d}y = 4y^2 + C$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 0$, also lautet nun die Funktion

$$C(y) = 4y^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = x^2 + C(y) = x^2 + 4y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu (1'): Wegen

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}\left(x_0, y_0\right) &= \widetilde{Q}\left(1,1\right) \\ &= 8 \cdot 1 = 8 \neq 0 \end{aligned}$$

finden wir ein Intervall $I_x \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 = x_0 \in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$x^2 + 4y(x)^2 = \widetilde{F}(x, y(x)) = \widetilde{F}\left(x_0, y_0\right) = \widetilde{F}\left(1,1\right) = 1^2 + 4 \cdot 1^2 = 1 + 4 \cdot 1 = 1 + 4 = 5 \text{ für alle } x \in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die Differentialgleichung (2') und wegen $\eta \neq 0$ auch die Differentialgleichung (2).
Schritt 5. Auflösbarkeit nach y: Wir können die obere Gleichung

$$x^2 + 4y(x)^2 = 5$$

explizit nach $y(x)$ auflösen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} & x^2 + 4y(x)^2 = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 4y(x)^2 = 5 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & y(x)^2 = \frac{5 - x^2}{4} \\ \Leftrightarrow\ & y(x) = \pm\sqrt{\frac{5 - x^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{5 - x^2}}{2} \end{aligned}$$

für alle $x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ wegen

$$x^2 - 5 = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 = 5 \ \Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{5}.$$

Wegen $y(1) = 1 > 0$ lautet nun die Lösung vom Anfangswertproblem (2)

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - x^2}$$

für alle $x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] =: I.$ $\square$