11.11.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Reduktionsverfahren von d'Alembert)

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)\,y' + y = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1$$

die obige Differentialgleichung löst. Bestimmen Sie danach die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung, machen Sie dazu den Ansatz

$$y_2(x) := y_1(x)v(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Das Integral $\int \frac{\mathrm{e}^s}{s(s-1)^2}\mathrm{d}s$ ist nicht elementar berechenbar.

Lösung von Aufgabe 1

Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. y_1 ist Lösung der Differentialgleichung: Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 1, \\ y_1''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$xy_1''(x) + (1-x)\,y_1'(x) + y_1(x) = x \cdot 0 + (1-x) \cdot 1 + (x-1) = 0 + 1 - x + x - 1 = 0,$$

d.h. y_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung.
Schritt 2. Ansatz $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ einsetzen und auflösen: Es gilt:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)v(x) = (x-1)\,v(x), \\ y_2'(x) &= v(x) + (x-1)\,v'(x), \\ y_2''(x) &= v'(x) + v'(x) + (x-1)\,v''(x) = 2v'(x) + (x-1)\,v''(x). \end{aligned}$$

Damit ist y_2 für gewissen v auch eine Lösung der Differentialgleichung, daher gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot y_2''(x) + (1-x)\,y_2'(x) + y_2(x) \\ &= x \cdot [2v'(x) + (x-1)\,v''(x)] + (1-x) \cdot [v(x) + (x-1)\,v'(x)] + (x-1)\,v(x) \\ &= 2xv'(x) + x\,(x-1)\,v''(x) + (1-x)\,v(x) - (x-1)^2\,v'(x) - (1-x)\,v(x) \\ &= v'(x)\left[2x - (x-1)^2\right] + x\,(x-1)\,v''(x) \\ \Leftrightarrow \quad v''(x) &= -\frac{2x-(x-1)^2}{x\,(x-1)}v'(x). \end{aligned}$$

Setze nun $u := v'$, dann ist $u' = v''$ und wir erhalten die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) = v''(x) = -\frac{2x + (1-x)\,(x-1)}{x\,(x-1)}v'(x) = -\left[\frac{2}{x-1} + \frac{1-x}{x}\right]u(x) = -\left[\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} - 1\right]u(x).\ (*)$$

Schritt 3. Lösung der homogenen Differentialgleichung $(*)$: Die Lösung lautet:

$$u_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{\int -\left[\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}-1\right]\mathrm{d}x} = C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{-2\log(|x-1|)-\log(|x|)+x} = \frac{C_{\mathrm{h}}\mathrm{e}^{x}}{|x|\,(x-1)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Berechnung von v bzw. y_2: Es gilt:

$$v(x) = \int v'(x)\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}x = C_{\mathrm{h}} \int \frac{\mathrm{e}^{x}}{|x|\,(x-1)^2}\mathrm{d}z$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$. Nun haben wir

$$y_2(x) = y_1(x)v(x) = C_{\mathrm{h}}\,(x-1)\int^{x} \frac{\mathrm{e}^{z}}{|z|\,(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ und einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C_{\mathrm{h}} = 1$ und erhalten so als Lösung:

$$y_2(x) = (x-1)\int^{x} \frac{\mathrm{e}^{z}}{|z|\,(z-1)^2}\mathrm{d}z \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$$

Aufstellen der allgemeinen Lösung y zur Differentialgleichung: Für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhalten wir also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1\,(x-1) + C_2\,(x-1)\int^{x} \frac{\mathrm{e}^{z}}{|z|\,(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 (Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme, bestimmen Sie dabei zuerst stets die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(1) $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 1 = y'(0)$.

(2) $y''' - y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{1}{2},\ y''(0) = 0$.

(3) $y'' + y = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = 0,\ y(0) = 1 = y'(0)$.

Lösung von Aufgabe 2

(1) Typ de Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9 = (\lambda - 3\mathrm{i})(\lambda + 3\mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Es handelt sich jeweils um zwei einfache nicht-reelle/ echt-komplexe Nullstellen $\lambda_1 = -3\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = 3\mathrm{i}$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1): Da wir hier nicht-reelle/ echt komplexe Nullstellen haben, betrachten wir laut der Formel von de Moivre/ Eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{3x\mathrm{i}} = \cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, damit ergeben sich die beiden Fundamentallösungen

$$\Phi_1(x) = \cos(3x) \text{ und } \Phi_2(x) = \sin(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1):

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) = C_{\mathrm{h},1}\cos(3x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Lösen des Anfangswertproblems:
Schritt 3. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (1): Es gilt für die erste Ableitung von y_{h}:

$$y_{\mathrm{h}}'(x) = -3C_{\mathrm{h},1}\sin(3x) + 3C_{\mathrm{h},2}\cos(3x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter haben wir für die Auswertung im Punkt $x = 0$:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{h}}(0) &= C_{\mathrm{h},1}\cos(3\cdot 0) + C_{\mathrm{h},2}\sin(3\cdot 0) = C_{\mathrm{h},1}\cos(0) + C_{\mathrm{h},2}\sin(0) = C_{\mathrm{h},1}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},2}\cdot 0 = C_{\mathrm{h},1} + 0 = C_{\mathrm{h},1}, \\ y_{\mathrm{h}}'(0) &= -3C_{\mathrm{h},1}\sin(3\cdot 0) + 3C_{\mathrm{h},2}\cos(3\cdot 0) = -3C_{\mathrm{h},1}\sin(0) + 3C_{\mathrm{h},2}\cos(0) = -3C_{\mathrm{h},1}\cdot 0 + 3C_{\mathrm{h},2}\cdot 1 = 0 + 3C_{\mathrm{h},2} = 3C_{\mathrm{h},2}. \end{aligned}$$

Aus der Anfangswertbedingung erhalten wir nun

$$\begin{aligned} 1 &= y_{\mathrm{h}}(0) = C_{\mathrm{h},1}, \\ 1 &= y_{\mathrm{h}}'(0) = 3C_{\mathrm{h},2} \ \Leftrightarrow\ C_{\mathrm{h},2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Damit haben wir als Lösung zum Anfangswertproblem (1) die Funktion:

$$y(x) = C_{\mathrm{h},1}\cos(3x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(3x) = 1\cdot\cos(3x) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3x) = \cos(3x) + \frac{\sin(3x)}{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = (\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, was wir z.B. durch Raten der Nullstelle $\lambda = 1$ und anschließender Polynomdivision erreichen. Es handelt sich jeweils um einfache Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = \mathrm{i}$, dabei ist λ_1 reell, aber λ_2 und λ_3 sind nicht-reell/ echt

komplex.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2): Als einfache reelle Nullstelle $\lambda_1 = 1$ ergibt sich die Fundamentallösung

$$\Phi_1(x) = \mathrm{e}^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da im Fall von $\lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i}$ wir nicht-reelle/ echt komplexe Nullstellen haben, betrachten wir laut der Formel von de Moivre/ Eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{x\mathrm{i}} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, damit ergeben sich die beiden Fundamentallösungen

$$\Phi_2(x) = \cos(x) \text{ und } \Phi_3(x) = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2):

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) + C_{\mathrm{h},3}\Phi_3(x) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^x + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) + C_{\mathrm{h},3}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung y_{h} der homogenen Differentialgleichung zu (2) machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\cos(x) + C_3(x)\sin(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot), C_3(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung von der Übung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\cos(x) + C_3'(x)\sin(x) &= 0,\\
C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x) &= 0,\\
C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\cos(x) - C_3'(x)\sin(x) &= 2\mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

Aus der Addition der ersten Gleichung mit der dritten erhalten wir so direkt

$$2C_1'(x)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x \;\Leftrightarrow\; C_1'(x) = 1.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x)\\
&= \mathrm{e}^x - C_2'(x)\sin(x) + C_3'(x)\cos(x)\\
\Leftrightarrow\; C_2'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + C_3'(x)\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

damit folgt durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\cos(x) + C_3'(x)\sin(x)\\
&= \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x + C_3'(x)\cos(x)}{\sin(x)}\cos(x) + C_3'(x)\sin(x)\\
&= \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + C_3'(x)\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)}\\
&= \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + C_3'(x)\frac{1}{\sin(x)}\\
\Leftrightarrow\; C_3'(x) &= -\mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x).
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$C_2'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + C_3'(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\sin(x)\cos(x) - \mathrm{e}^x\cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{\mathrm{e}^x\sin^2(x) - \mathrm{e}^x\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x).$$

Wir betrachten zuerst die unbestimmten Integrale

$$\int \mathrm{e}^x\sin(x)\mathrm{d}x \text{ und } \int \mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Es gilt:

$$\int \mathrm{e}^x\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x) - \int \mathrm{e}^x \sin(x) \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \quad \int \mathrm{e}^x \sin(x) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \mathrm{e}^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right), \\
\int \mathrm{e}^x \cos(x) \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \int \mathrm{e}^x \sin(x) \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \frac{1}{2} \mathrm{e}^x \left(\sin(x) - \cos(x)\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{e}^x \left(\cos(x) + \sin(x)\right).
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
C_1(x) &= \int 1 \mathrm{d}x = x, \\
C_3(x) &= -\int \left(\mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{e}^x}{2} \left(\sin(x) - \cos(x) + \cos(x) + \sin(x)\right) \\
&= -\mathrm{e}^x \sin(x), \\
C_2(x) &= \int \left(\mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2} \left(\sin(x) - \cos(x) - \cos(x) - \sin(x)\right) \\
&= -\mathrm{e}^x \cos(x)
\end{aligned}
$$

Damit lautet die partikuläre Lösung von (2):

$$
y_{\mathrm{p}}(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \cos^2(x) - \mathrm{e}^x \sin^2(x) = \left[x - \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)\right] \mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ laut dem trigonometrischen Pythagoras.
Bemerkung: Wir können auch die Vorlesung zitieren um auf die Form der partikulären Lösung von (2) zu kommen. Dazu wählen wir die Funktion $q \equiv 2$ und $\omega = 0$, sowie $\sigma = 1$, dann haben wir

$$
f(x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x} \cos(\omega x) = 2\mathrm{e}^{1 \cdot x} \cos(0 \cdot x) = 2\mathrm{e}^x \cos(0) = 2\mathrm{e}^x \cdot 1 = 2\mathrm{e}^x
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, was genau der Inhomogenität bei der Differentialgleichung (2) entspricht. Laut Vorlesung hat nun die partikuläre Lösung von (2) die Form, da $\sigma + \mathrm{i}\omega = 1 + 0 \cdot \mathrm{i} = 1 + 0 = 1$ eine einfach Nullstelle vom Polynom p ist, d.h. $\nu = 1$:

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{p}}(x) &= x^\nu \left[\widetilde{r}(x) \sin(\omega x) + \widetilde{q}(x) \cos(\omega x)\right] \mathrm{e}^{\sigma x} = x^1 \left[\widetilde{r}(x) \sin(0 \cdot x) + \widetilde{q}(x) \cos(0 \cdot x)\right] \mathrm{e}^{1 \cdot x} \\
&= x \left[\widetilde{r}(x) \sin(0) + \widetilde{q}(x) \cos(0)\right] \mathrm{e}^x = x \left[\widetilde{r}(x) \cdot 0 + \widetilde{q}(x) \cdot 1\right] \mathrm{e}^x \\
&= x \left[0 + \widetilde{q}(x)\right] \mathrm{e}^x = x\widetilde{q}(x)\mathrm{e}^x
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\widetilde{r}, \widetilde{q} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome vom Grad m ist. Weil $m = 0$ ist, ist das Polynom $\widetilde{q}$ konstant, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\widetilde{q} \equiv c$. Wir haben dann laut Produktregel:

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{p}}(x) &= x\widetilde{q}(x)\mathrm{e}^x = cx\mathrm{e}^x, \\
y_{\mathrm{p}}'(x) &= c\mathrm{e}^x + cx\mathrm{e}^x = c\,(1+x)\,\mathrm{e}^x, \\
y_{\mathrm{p}}''(x) &= c\mathrm{e}^x + c\,(1+x)\,\mathrm{e}^x = c\,(1+1+x)\,\mathrm{e}^x = c\,(2+x)\,\mathrm{e}^x, \\
y_{\mathrm{p}}'''(x) &= c\mathrm{e}^x + c\,(2+x)\,\mathrm{e}^x = c\,(1+2+x)\,\mathrm{e}^x = c\,(3+x)\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung (2) folgt nun:

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{e}^x &= y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = c\,(3+x)\,\mathrm{e}^x - c\,(2+x)\,\mathrm{e}^x + c\,(1+x)\,\mathrm{e}^x - cx\mathrm{e}^x \\
&= c\left[3 + x - (2+x) + 1 + x - x\right] \mathrm{e}^x = c\,(4 + x - 2 - x)\,\mathrm{e}^x = 2c\mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow \quad c &= 1.
\end{aligned}
$$

Die partikuläre Lösung zur Differentialgleichung (2) lautet damit:

$$
y_{\mathrm{p}}(x) = cx\mathrm{e}^x = 1 \cdot x\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.
$$

Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung zu (2): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) lautet

$$
y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{h}}(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x + C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^x + C_{\mathrm{h},2} \cos(x) + C_{\mathrm{h},3} \sin(x)
$$

$$= (x-1+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^x + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) + C_{\mathrm{h},3}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3} \in \mathbb{R}$.

Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung zum Anfangswertproblem (2): Wir erhalten für die ersten beiden Ableitungen:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (x-1+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - C_{\mathrm{h},2}\sin(x) + C_{\mathrm{h},3}\cos(x)\\
&= (x+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^x - C_{\mathrm{h},2}\sin(x) + C_{\mathrm{h},3}\cos(x),\\
y''(x) &= (x+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - C_{\mathrm{h},2}\cos(x) - C_{\mathrm{h},3}\sin(x)\\
&= (x+1+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^x - C_{\mathrm{h},2}\cos(x) - C_{\mathrm{h},3}\sin(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun setzen wir den Punkt $x = 0$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
y(0) &= (0-1+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^0 + C_{\mathrm{h},2}\cos(0) + C_{\mathrm{h},3}\sin(0)\\
&= (-1+C_{\mathrm{h},1})\cdot 1 + C_{\mathrm{h},2}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},3}\cdot 0\\
&= -1 + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} + 0\\
&= -1 + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2},\\
y'(0) &= (0+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^0 - C_{\mathrm{h},2}\sin(0) + C_{\mathrm{h},3}\cos(0)\\
&= C_{\mathrm{h},1}\cdot 1 - C_{\mathrm{h},2}\cdot 0 + C_{\mathrm{h},3}\cdot 1\\
&= C_{\mathrm{h},1} - 0 + C_{\mathrm{h},3}\\
&= C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},3},\\
y''(0) &= (0+1+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^0 - C_{\mathrm{h},2}\cos(0) - C_{\mathrm{h},3}\sin(0)\\
&= (1+C_{\mathrm{h},1})\cdot 1 - C_{\mathrm{h},2}\cdot 1 - C_{\mathrm{h},3}\cdot 0\\
&= 1 + C_{\mathrm{h},1} - C_{\mathrm{h},2} - 0\\
&= 1 + C_{\mathrm{h},1} - C_{\mathrm{h},2}.
\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y''(0) = 0$ folgt nun

$$C_{\mathrm{h},2} = 1 + C_{\mathrm{h},1}$$

ist, d.h. nun ist wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned}
1 = y(0) = -1 + C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},2} &= -1 + C_{\mathrm{h},1} + 1 + C_{\mathrm{h},1} = 2C_{\mathrm{h},1}\\
\Leftrightarrow\ 2C_{\mathrm{h},1} &= 1\\
\Leftrightarrow\ C_{\mathrm{h},1} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$C_{\mathrm{h},2} = 1 + C_{\mathrm{h},1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Zuletzt erhalten wir aus der Anfangsbedingung $y'(0) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = y'(0) = C_{\mathrm{h},1} + C_{\mathrm{h},3} &= \frac{1}{2} + C_{\mathrm{h},3}\\
\Leftrightarrow\ C_{\mathrm{h},3} &= 0.
\end{aligned}$$

Als Lösung des Anfangswertproblems (2) erhalten wir also

$$\begin{aligned}
y(x) &= (x-1+C_{\mathrm{h},1})\,\mathrm{e}^x + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) + C_{\mathrm{h},3}\sin(x)\\
&= \left(x - 1 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}\cos(x) + 0\cdot\sin(x)\\
&= \left(x - 1 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}\cos(x) + 0\\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}\cos(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(3) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + \mathrm{i})\,(\lambda - \mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Es handelt sich jeweils um einfache nicht-reelle/ echt-komplexe Nullstellen $\lambda_1 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = \mathrm{i}$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3): Da wir hier nicht-reelle/ echt komplexe Nullstellen haben, betrachten wir laut der Formel von de Moivre/ Eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{x\mathrm{i}} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, damit ergeben sich die beiden Fundamentallösungen

$$\Phi_1(x) = \cos(x) \text{ und } \Phi_2(x) = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3):

$$y_\mathrm{h}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) = C_{\mathrm{h},1}\cos(x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung zu (3) machen wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$y_\mathrm{p}(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)$$

mit Funktionen $C_1(\cdot), C_2(\cdot)$. Unsere Vorüberlegung von der Übung liefert uns das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) &= 0 \\ -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir so direkt

$$C_2'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}C_1'(x).$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) \\ &= -C_1'\sin(x) - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}C_1'(x)\cos(x) \\ &= -C_1'(x)\left(\sin(x) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right) \\ &= -C_1'(x)\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin(x)} \\ &= -C_1'(x)\frac{1}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow\ C_1'(x) &= -\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = -\tan^2(x) \end{aligned}$$

nach dem trigonometrischen Pythagoras, damit folgt nun

$$C_2'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}C_1'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Damit gilt nach partieller Integration im Falle von $C_2'(\cdot)$:

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\log\left(|\cos(x)|\right), \\ C_1(x) &= -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = -\int \sin(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= -\sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)} + \int \cos(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \int 1\mathrm{d}x \\ &= -\tan(x) + x = x - \tan(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$. Damit lautet die partikuläre Lösung von (3):

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x) = (x - \tan(x))\cos(x) - \log(|\cos(x)|)\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (3): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) lautet

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{h}}(x) = (x - \tan(x))\cos(x) - \log(|\cos(x)|)\sin(x) + C_{\mathrm{h},1}\cos(x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.

Lösen des Anfangswertproblems:

Schritt 5. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem (3): Es gilt für die erste Ableitung von y laut Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \left(1 - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\cos(x) - (x - \tan(x))\sin(x) - \frac{-\sin(x)\cdot \operatorname{sign}(\cos(x))}{|\cos(x)|}\cdot\sin(x) \\
&\quad - \log(|\cos(x)|)\cos(x) - C_{\mathrm{h},1}\sin(x) + C_{\mathrm{h},2}\cos(x) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\cos(x) - (x - \tan(x))\sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} - \log(|\cos(x)|)\cos(x) - C_{\mathrm{h},1}\sin(x) + C_{\mathrm{h},2}\cos(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$, da nach der Quotientenregel und dem trigonometrischen Pythagoras gilt:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(\cdot)}{\cos(\cdot)}\right)'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$. Weiter haben wir für die Auswertung im Punkt $x = 0$:

$$\begin{aligned}
1 = y(0) &= (0 - \tan(0))\cos(0) - \log(|\cos(0)|)\sin(0) + C_{\mathrm{h},1}\cos(0) + C_{\mathrm{h},2}\sin(0) \\
&= 0\cdot 1 - \log(|1|)\cdot 0 + C_{\mathrm{h},1}\cdot 1 + C_{\mathrm{h},2}\cdot 0 \\
&= 0 - 0 + C_{\mathrm{h},1} + 0 = C_{\mathrm{h},1}, \\
1 = y'(0) &= \left(1 - \frac{1}{\cos^2(0)}\right)\cos(0) - (0 - \tan(0))\sin(0) + \frac{\sin^2(0)}{\cos(0)} - \log(|\cos(0)|)\cos(0) - C_{\mathrm{h},1}\sin(0) + C_{\mathrm{h},2}\cos(0) \\
&= \left(1 - \frac{1}{1^2}\right)\cdot 1 + 0\cdot 0 + \frac{0^2}{1} - \log(|1|)\cdot 1 - C_{\mathrm{h},1}\cdot 0 + C_{\mathrm{h},2}\cdot 1 \\
&= \left(1 - \frac{1}{1}\right) + 0 - \log(1) - 0 + C_{\mathrm{h},2} = 1 - 1 - 0 + C_{\mathrm{h},2} = C_{\mathrm{h},2}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir als Lösung zum Anfangswertproblem (3) die Funktion:

$$\begin{aligned}
y(x) &= (x - \tan(x))\cos(x) - \log(|\cos(x)|)\sin(x) + C_{\mathrm{h},1}\cos(x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(x) \\
&= (x - \tan(x))\cos(x) - \log(|\cos(x)|)\sin(x) + 1\cdot\cos(x) + 1\cdot\sin(x) \\
&= (x - \tan(x))\cos(x) - \log(|\cos(x)|)\sin(x) + \cos(x) + \sin(x) \\
&= (x + 1 - \tan(x))\cos(x) + (1 - \log(|\cos(x)|))\sin(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. □

Aufgabe 3 (Eulersche Differentialgleichungen)

Lösen Sie die beiden Eulerschen Differentialgleichungen auf dem Intervall $(0,\infty)$:

(1) $y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0.$

(2) $xy''' + 2y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0.$

(3) $x^2y^{(4)} + 5xy''' + y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0.$

Lösung von Aufgabe 3

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right) &= v''(t) - v'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right) + 5\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + 5y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) + 5v'(t) + 5v(t) \\ &= v''(t) + 4v'(t) + 5v(t). \qquad (1') \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda - (-2+\mathrm{i}))\,(\lambda - (-2-\mathrm{i}))$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da z.B. nach der Mitternachtsformel gilt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = -2 \pm \mathrm{i}.$$

Es handelt sich jeweils um zwei einfache nicht-reelle/ echt-komplexe Nullstellen.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1'): Da wir hier nicht-reelle/ echt-komplexe Nullstellen haben, betrachten wir laut der Formel von de Moivre/ Eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-2t+\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{-2t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\right) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(t) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t}\sin(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ergeben sich die beiden Fundamentallösungen

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(t) \text{ und } \Phi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (1'):

$$v_{\mathrm{h}}(t) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(t) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(t) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-2t}\cos(t) + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{-2t}\sin(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) &= v\left(\log(x)\right) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-2\log(x)}\cos\left(\log(x)\right) + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{-2\log(x)}\sin\left(\log(x)\right) \\ &= C_{\mathrm{h},1}\frac{\cos\left(\log(x)\right)}{x^2} + C_{\mathrm{h},2}\frac{\sin\left(\log(x)\right)}{x^2} \\ &= \frac{C_{\mathrm{h},1}\cos\left(\log(x)\right) + C_{\mathrm{h},2}\sin\left(\log(x)\right)}{x^2} \end{aligned}$$

für alle $x \in (0,\infty)$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$. □

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y(\mathrm{e}^t)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&v'(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\
&v''(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) - v'(t), \\
&v'''(t) = v''(t) + 2\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) + 2\left(v''(t) - v'(t)\right) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = 3v''(t) - 2v'(t) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'''(t) - 3v''(t) + 2v'(t)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (2):

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) + 2\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) - \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + y\left(\mathrm{e}^t\right) \\
&= \left(v'''(t) - 3v''(t) + 2v'(t)\right) + 2\left(v''(t) - v'(t)\right) - v'(t) + v(t) \\
&= v'''(t) - v''(t) - v'(t) + v(t). \qquad (2')
\end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt durch scharfes Hinsehen, dass $\lambda = 1$ eine Nullstelle ist und anschließender Polynomdivision, sowie dritter binomischer Formel:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 1\right) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Nun ist $\lambda_1 = -1$ eine einfache reelle Nullstelle und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ eine doppelte reelle Nullstelle.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2'): Aus der einfachen reellen Nullstelle $\lambda_1 = -1$ erhalten wir die Fundamentallösung:

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter bekommen wir aus der doppelten reellen Nullstelle $\lambda_{2,3} = 1$ die beiden Fundamentallösungen:

$$\Phi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^t \text{ und } \Phi_3(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = t\mathrm{e}^t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen bzw. doppelte Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (2'):

$$v_{\mathrm{h}}(t) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(t) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(t) + C_{\mathrm{h},3}\Phi_3(t) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-t} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^t + C_{\mathrm{h},3} t\mathrm{e}^t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v(\log(x)) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-\log(x)} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{\log(x)} + C_{\mathrm{h},3}\log(x)\mathrm{e}^{\log(x)} = C_{\mathrm{h},1}\frac{1}{x} + C_{\mathrm{h},2}x + C_{\mathrm{h},3}x\log(x)$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3} \in \mathbb{R}$. ☐
(3) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Die Differentialgleichung in (3) auf $(0, \infty)$ ist äquivalent zu

$$x^4 y^{(4)} + 5x^3 y''' + x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y(\mathrm{e}^t)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&v'(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\
&v''(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) - v'(t), \\
&v'''(t) = v''(t) + 2\mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = v''(t) + 2\left(v''(t) - v'(t)\right) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = 3v''(t) - 2v'(t) + \mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'''(t) - 3v''(t) + 2v'(t), \\
&v^{(4)}(t) = 3v'''(t) - 2v''(t) + 3\mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{4t} y^{(4)}\left(\mathrm{e}^t\right) = 3v'''(t) - 2v''(t) + 3v'''(t) - 9v''(t) + 6v'(t) + \mathrm{e}^{4t} y^{(4)}\left(\mathrm{e}^t\right) \\
&\phantom{v^{(4)}(t)} = 6v'''(t) - 11v''(t) + 6v'(t) + \mathrm{e}^{4t} y^{(4)}\left(\mathrm{e}^t\right) \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{4t} y^{(4)}\left(\mathrm{e}^t\right) = v^{(4)}(t) - 6v'''(t) + 11v''(t) - 6v'(t)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung (3):

$$0 = \mathrm{e}^{4t} y^{(4)}\left(\mathrm{e}^t\right) + 5\mathrm{e}^{3t} y'''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + 2\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - 2y\left(\mathrm{e}^t\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(v^{(4)}(t) - 6v'''(t) + 11v''(t) - 6v'(t)\Big) + 5\left(v'''(t) - 3v''(t) + 2v'(t)\right) + \left(v''(t) - v'(t)\right) + 2v'(t) - 2v(t)\\
&= v^{(4)}(t) - 6v'''(t) + 11v''(t) - 6v'(t) + 5v'''(t) - 15v''(t) + 10v'(t) + v''(t) - v'(t) + 2v'(t) - 2v(t)\\
&= v^{(4)}(t) - v'''(t) - 3v''(t) + 5v'(t) - 2v(t). \quad (3')
\end{aligned}
$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt durch scharfes Hinsehen, dass $\lambda = 1$ eine Nullstelle ist und anschließender Polynomdivision, sowie erneutes scharfes Hinsehen, dass $\lambda = 1$ eine weitere Nullstelle ist und gefolgter Mitternachtsformel oder Raten/ scharfes Hinsehen der anderen beiden Nullstellen:

$$
p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)\left(\lambda^3 - 3\lambda + 2\right) = (\lambda - 1)^2\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)
$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Nun ist $\lambda_1 = -2$ eine einfache reelle Nullstelle und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ eine dreifache reelle Nullstelle.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3'): Aus der einfachen reellen Nullstelle $\lambda_1 = -2$ erhalten wir die Fundamentallösung:

$$
\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{-2t}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter bekommen wir aus der dreifachen reellen Nullstelle $\lambda_{2,3,4} = 1$ die drei Fundamentallösungen:

$$
\Phi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^t, \;\; \Phi_3(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = t\mathrm{e}^t \text{ und } \Phi_4(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = t^2\mathrm{e}^t
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen bzw. dreifache Nullstellen handelt haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (3'):

$$
v_{\mathrm{h}}(t) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(t) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(t) + C_{\mathrm{h},3}\Phi_3(t) + C_{\mathrm{h},4}\Phi_4(t) = C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-2t} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^t + C_{\mathrm{h},3}t\mathrm{e}^t + C_{\mathrm{h},4}t^2\mathrm{e}^t
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3}, C_{\mathrm{h},4} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
y(x) = v(\log(x)) &= C_{\mathrm{h},1}\mathrm{e}^{-2\log(x)} + C_{\mathrm{h},2}\mathrm{e}^{\log(x)} + C_{\mathrm{h},3}\log(x)\mathrm{e}^{\log(x)} + C_{\mathrm{h},4}\log(x)^2\mathrm{e}^{\log(x)}\\
&= C_{\mathrm{h},1}\frac{1}{x^2} + C_{\mathrm{h},2}x + C_{\mathrm{h},3}x\log(x) + C_{\mathrm{h},4}x\log(x)^2\\
&= \frac{C_{\mathrm{h},1}}{x^2} + \left[C_{\mathrm{h},2} + \left(C_{\mathrm{h},3} + C_{\mathrm{h},4}\log(x)\right)\log(x)\right]x
\end{aligned}
$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2}, C_{\mathrm{h},3}, C_{\mathrm{h},4} \in \mathbb{R}$. □