26.11.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Potenzreihenansatz)

Bestimmen Sie jeweils durch den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ die jeweilige Lösung y von folgenden Anfangswertproblemen:

(1) $\left(1+x^2\right) y'' + 2xy' - 2y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 7.$

(2) $y' - xy = x + 1,\ y(0) = 1.$

(3) $y'' + \sin(x)y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 12.$

Schreiben Sie zusätzlich die Lösung y aus Aufgabenteil (3) bis zu den ersten fünf Summanden exakt auf (d.h. bis einschließlich c_4).

Lösung von Aufgabe 1

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,\\
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x^{1-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1},\\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Differentialgleichung (1) ist dabei äquivalent zu

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' - 2y = 0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist $\left|-x^2\right| = x^2 < 1$, daher können wir die Koeffizienten der obigen Differentialgleichung per geometrische Reihe in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{1+x^2} &= 2x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1},\\
\frac{-2}{1+x^2} &= -2 \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{n+1} x^{2n+1},
\end{aligned}$$

d.h. die Potenzreihe y hat mindestens Konvergenzradius 1 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (1): Setzen wir den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in die Differentialgleichung (1) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = \left(1+x^2\right) y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) &= \left(1+x^2\right) \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0} 2 c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+2-1)\,c_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} x^n + n\,(n-1)\,c_n x^n + 2n c_n x^n - 2 c_n x^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + n\,(n-1)\,c_n + 2n c_n - 2 c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + \left[n\,(n-1) + 2n - 2\right] c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + \left[n\,(n-1) + 2\,(n-1)\right] c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + (n+2)\,(n-1)\,c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \left[(n+1)\,c_{n+2} + (n-1)\,c_n\right] x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\begin{aligned}
&(n+2)\left[(n+1)\,c_{n+2} + (n-1)\,c_n\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(n+1)\,c_{n+2} + (n-1)\,c_n = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(n+1)\,c_{n+2} = -\,(n-1)\,c_n \\
\Leftrightarrow\ &c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1} c_n.
\end{aligned}$$

Damit legt insbesondere c_0 alle Koeffizienten mit geraden Index fest. Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass

$$c_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} c_0}{2n-1} \text{ und } c_{2n+1} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang (I.A.) $n = 1$: Es gilt:

$$\begin{aligned}
c_{2\cdot 1} = c_2 = c_{0+2} = -\frac{0-1}{0+1} c_0 = -\frac{-1}{1} c_0 = c_0 = \frac{(-1)^2 c_0}{0+1}, \\
c_{2\cdot 1+1} = c_{2+1} = c_3 = c_{1+2} = -\frac{1-1}{1+1} c_1 = -\frac{0}{2} c_1 = 0 \cdot c_1 = 0
\end{aligned}$$

laut der bewiesenen Vorschrift für jedes $c_1 \in \mathbb{R}$.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig und für dieses n gelte:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} c_0}{2n-1} \text{ und } c_{2n+1} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsschluss (I.S.): Es gilt nun für $n+1$ laut der bewiesenen Vorschrift und der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$c_{2(n+1)} = c_{2n+2} = -\frac{2n-1}{2n+1} c_{2n} = -\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+1} c_0}{2n-1} = \frac{(-1)^{n+2} c_0}{2n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{2n+2-1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{2(n+1)-1},$$

$$c_{2(n+1)+1} = c_{2n+2+1} = c_{(2n+1)+2} = -\frac{2n+1-1}{2n+1+1} c_{2n+1} = -\frac{2n}{2n+2} \cdot 0 = -\frac{2n}{2(n+1)} \cdot 0 = -\frac{n}{n+1} \cdot 0 = 0.$$

Dies war in der vollständigen Induktion zu beweisen.

Schritt 4. Die allgemeine y der Differentialgleichung (1) aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung (1):

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + c_1 x^1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= c_0 + c_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} c_0}{2n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^{2n+1} \\ &= c_0 + c_1 x + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} c_0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Lösen vom Anfangswertproblem:

Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem (1) aufstellen: Die beiden Anfangsdaten ergeben die beiden Werte c_0 und c_1:

$$\begin{aligned} -1 = y(0) &= c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 0^n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot c_n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 = c_0 + 0 = c_0, \\ 7 = y'(0) &= c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n 0^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n \cdot 0 = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = c_1 + 0 = c_1. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem (1):

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n} = -1 + 7x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. $\square$

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Koeffizienten bzw. die Inhomogenität sind stets Polynome vom Grad 1, d.h. insbesondere (abbrechende) Potenzreihen mit Konvergentradius unendlich. Also existiert die Lösung y auf ganz $\mathbb{R}$.

Schritt 2. Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (2): Setzen wir den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in die Differentialgleichung (2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 + x = x + 1 = y'(x) - xy(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= (0+1) c_{0+1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \cdot c_1 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} x^n - c_{n-1} x^n\right] \\
&= c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} - c_{n-1}\right] x^n \\
&= c_1 + \left[(1+1)\, c_{1+1} - c_{1-1}\right] x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} - c_{n-1}\right] x^n \\
&= c_1 + (2c_2 - c_0)\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)\, c_{n+1} - c_{n-1}\right] x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelten:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1, \\
2c_2 - c_0 &= 1 \\
\Leftrightarrow\ 2c_2 &= 1 + c_0 \\
\Leftrightarrow\ c_2 &= \frac{1 + c_0}{2}, \\
\Leftrightarrow\ (n+1)\, c_{n+1} - c_{n-1} &= 0 \\
\Leftrightarrow\ (n+1)\, c_{n+1} &= c_{n-1} \\
\Leftrightarrow\ c_{n+1} &= \frac{c_{n-1}}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass

$$
c_{2k} = \frac{1 + c_0}{\prod_{i=1}^{k} (2i)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2 \text{ und } c_{2l+1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{l} (2i+1)} \text{ für alle } l \in \mathbb{N}.
$$

Induktionsanfang (I.A.) $k = 2$, $l = 1$: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
c_{2\cdot 2} = c_4 = c_{3+1} &= \frac{c_{3-1}}{3+1} = \frac{c_2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + c_0}{2} = \frac{1 + c_0}{(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1)}, \\
c_{2\cdot 1+1} = c_{2+1} &= \frac{c_{2-1}}{2+1} = \frac{c_1}{3} = \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)}
\end{aligned}
$$

laut der bewiesenen Vorschrift.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Seien nun $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ fest, aber beliebig und für diese k und l gelte:

$$
c_{2k} = \frac{1 + c_0}{\prod_{i=1}^{k} (2i)} \text{ und } c_{2l+1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{l} (2i+1)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.
$$

Induktionsschluss (I.S.): Es gilt nun für $k+1$ und $l+1$ laut der bewiesenen Vorschrift und der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$
\begin{aligned}
c_{2(k+1)} &= c_{2k+2} = c_{(2k+1)+1} = \frac{c_{2k+1-1}}{2k+1+1} = \frac{c_{2k}}{2k+2} \\
&= \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1 + c_0}{\prod_{i=1}^{k} (2i)} = \frac{1 + c_0}{\prod_{i=1}^{k+1} (2i)}, \\
c_{2(l+1)+1} &= c_{2l+2+1} = \frac{c_{2l+2-1}}{2l+2+1} = \frac{c_{2l+1}}{2(l+1)+1} = \frac{1}{2(l+1)+1} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{l} (2i+1)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{l+1} (2i+1)}.
\end{aligned}
$$

Dies war in der vollständigen Induktion zu beweisen.
Schritt 4. Die allgemeine y der Differentialgleichung (2) aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung (2):

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n} x^{2n} \\
&= c_0 + x + \frac{1+c_0}{2} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i+1)} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+c_0}{\prod_{i=1}^{n} (2i)} x^{2n} \\
&= c_0 + x + \frac{1+c_0}{2} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i+1)} \cdot x^{2n+1} + (1+c_0) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i)} x^{2n}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstante $c_0 \in \mathbb{R}$.
Lösen vom Anfangswertproblem:
Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem (2) aufstellen: Der Anfangswert ergibt die den Wert c_0:

$$1 = y(0) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 0^n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot c_n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 = c_0 + 0 = c_0.$$

Damit folgt nun:

$$1 + c_0 = 1 + 1 = 2, \text{ sowie } c_2 = \frac{1+c_0}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem (2):

$$y(x) = c_0 + x + \frac{1+c_0}{2} x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i+1)} \cdot x^{2n+1} + (1+c_0) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i)} x^{2n} = 1 + x + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i+1)} \cdot x^{2n+1} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (2i)} x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(3) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \\
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x^{1-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.
\end{aligned}$$

Weiter wählen wir die Folge

$$\beta_n := \begin{cases} 0 \text{ für } n \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \text{ für } n \text{ ungerade mit } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = 2k+1 \end{cases} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit haben wir:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Die Koeffizienten der Differentialgleichung (3) sind Potenzreihen (sin) mit Konvergenzradius unendlich, damit existiert die Lösung y auf ganz $\mathbb{R}$.
Schritt 2. Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (2): Es gilt nach dem Satz des Cauchy-Produkts für Reihen:

$$\sin(x) y(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k c_{n-k} x^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k c_{n-k} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k c_{n-k} \right) x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in die Differentialgleichung (3) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = y''(x) + \sin(x)y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k c_{n-k} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k c_{n-k} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} x^n + \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k c_{n-k} \right) x^n \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k c_{n-k} \right] x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\begin{aligned}
&(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k c_{n-k} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k c_{n-k} \\
&\Leftrightarrow\ c_{n+2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k c_{n-k}}{(n+2)\,(n+1)}.
\end{aligned}$$

So gilt:

$$\begin{aligned}
c_2 &= c_{0+2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{0} \beta_k c_{0-k}}{(0+2)\,(0+1)} = \frac{0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0, \\
c_3 &= c_{1+2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{1} \beta_k c_{1-k}}{(1+2)\,(1+1)} = \frac{\beta_1 c_{1-1}}{3 \cdot 2} = \frac{\frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0+1)!} c_0}{6} = \frac{\frac{1}{(0+1)!}}{6} c_0 = \frac{\frac{1}{1!}}{6} c_0 = \frac{\frac{1}{1}}{6} c_0 = \frac{c_0}{6}, \\
c_4 &= c_{2+2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{2} \beta_k c_{2-k}}{(2+2)\,(2+1)} = \frac{\beta_1 c_{2-1} + \beta_2 c_{2-2}}{4 \cdot 3} = \frac{\frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0+1)!} c_1 + 0 \cdot c_0}{12} = \frac{\frac{1}{(0+1)!} c_1 + 0}{12} = \frac{\frac{1}{1!}}{12} c_1 = \frac{\frac{1}{1}}{12} c_1 = \frac{c_1}{12}.
\end{aligned}$$

Schritt 4. Die allgemeine y der Differentialgleichung (2) aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung (2):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ und der Vorschrift

$$c_{n+2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k c_{n-k}}{(n+2)\,(n+1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösen vom Anfangswertproblem:

Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem (2) aufstellen: Die beiden Anfangsdaten ergeben die beiden Werte c_0 und c_1:

$$\begin{aligned}
6 = y(0) &= c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 0^n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot c_n = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 0 = c_0 + 0 = c_0, \\
12 = y'(0) &= c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n 0^{n-1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n \cdot 0 = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = c_1 + 0 = c_1.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$c_3 = \frac{c_0}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ und } c_4 = \frac{c_1}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem (3):

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 6 + 12x + \sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n = 6 + 12x + x^3 + x^4 + \dots$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$c_{n+2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k c_{n-k}}{(n+2)\,(n+1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Aufgabe 2 (Abgewandelter Potenzreihenansatz)

Zeigen Sie, dass bei den folgenden Differentialgleichungen

(1) $9x^2y'' + (2+x)\,y = 0$,

(2) $xy'' + y' + 4x^3y = 0$,

(3) $x^2y'' - xy' - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right)y = 0$

im Punkt $x_0 = 0$ eine schwach singuläre Stelle vorliegt und führen Sie einen abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n}$$

mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ und Exponenten $r \in \mathbb{R}$ durch um zwei linear unabhängige Lösungen, y_1 und y_2, zu finden.

Lösung von Aufgabe 2

(1) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und einer Potenz $r \in \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Schwache Singularität bei $x_0 = 0$: Setze

$$P(x) := 9x^2,\ Q(x) := 0,\ R(x) := 2+x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= P(0) = 9\cdot 0^2 = 9\cdot 0 = 0, \\ (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} &= (x-0)\,\frac{0}{9x^2} = x\cdot 0 = 0, \\ (x-x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)} &= (x-0)^2\,\frac{2+x}{9x^2} = x^2\cdot\frac{2+x}{9x^2} = \frac{2+x}{9} = \frac{2}{9}+\frac{1}{9}x \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\rho = \infty$. Damit existiert die Lösung y stets auf ganz $\mathbb{R}$ laut Vorlesung. **Schritt 2. Abgewandelten Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (1)**: Setzen wir den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ in die Differentialgleichung (1) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = 9x^2y''(x) + (2+x)\,y(x) &= 9x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-1)\,c_n x^{n+r-2} + (2+x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 9\,(n+r)\,(n+r-1)\,c_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 9\,(n+r)\,(n+r-1)\,c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[9\,(n+r)\,(n+r-1)\,c_n x^{n+r} + 2c_n x^{n+r}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[9\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+2\right] c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= \left[9\left(0+r\right)\left(0+r-1\right)+2\right] c_0 x^{0+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[9\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+2\right] c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \\
&= \left[9r\left(r-1\right)+2\right] c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+2\right] c_n x^{n+r} + c_{n-1} x^{n+r}\right] \\
&= \left(9r^2-9r+2\right) c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+2\right] c_n + c_{n-1}\right] x^{n+r}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, also gilt für r wegen $c_0 \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
&\left(9r^2-9r+2\right) c_0 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 9r^2-9r+2 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ r = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2-4\cdot 9\cdot 2}}{2\cdot 9} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18}
\end{aligned}
$$

nach der Mitternachtsformel. Also ist

$$
r_1 := \frac{9+3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ und } r_2 := \frac{9-3}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.
$$

Demnach ist nun

$$
r_1 - r_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z},
$$

d.h. wir sind in Fall 1.
Fall (a) $r_1 = \frac{2}{3}$: Es muss gelten:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(9r_1^2-9r_1+2\right) c_0 x^{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+r_1\right)\left(n+r_1-1\right)+2\right] c_n + c_{n-1}\right] x^{n+r_1} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n+\frac{2}{3}-1\right)+2\right] c_n + c_{n-1}\right] x^{n+\frac{2}{3}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2\right] c_n + c_{n-1}\right] x^{n+\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$
\begin{aligned}
&\left[9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2\right] c_n + c_{n-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \left[9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2\right] c_n = -c_{n-1} \\
&\Leftrightarrow\ c_n = -\frac{c_{n-1}}{9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2}
\end{aligned}
$$

Damit legt in diesem Fall insbesondere c_0 alle Koeffizienten mit fest.
Fall (b) $r_2 = \frac{1}{3}$: Es muss gelten:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(9r_2^2-9r_2+2\right) d_0 x^{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+r_2\right)\left(n+r_2-1\right)+2\right] c_n + d_{n-1}\right] x^{n+r_2} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n+\frac{1}{3}-1\right)+2\right] d_n + d_{n-1}\right] x^{n+\frac{1}{3}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2\right] d_n + d_{n-1}\right] x^{n+\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned}\left[9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2\right]d_n + d_{n-1} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \left[9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2\right]d_n = -d_{n-1} \\ \Leftrightarrow \quad d_n = -\frac{d_{n-1}}{9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2}\end{aligned}$$

Damit legt in diesem Fall insbesondere c_0 alle Koeffizienten mit fest.

Schritt 4. Die linear unabhängigen Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung (1) aufstellen: Da wir im Fall 1. des Satzes sind, lauten zwei linear unabhängige Lösungen, y_1 und y_2, folgendermaßen:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{\frac{2}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sqrt[3]{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\ y_2(x) &= x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sqrt[3]{x}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \neq 0 \neq d_0$ und den Vorschriften für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}c_n &= -\frac{c_{n-1}}{9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2}, \\ d_n &= -\frac{d_{n-1}}{9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2}.\end{aligned}$$

$\square$

(2) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und einer Potenz $r \in \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2}.\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Schwache Singularität bei $x_0 = 0$: Setze

$$P(x) := x,\ Q(x) := 1,\ R(x) := 4x^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}P(x_0) &= P(0) = 0, \\ (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} &= (x-0)\frac{1}{x} = x\cdot\frac{1}{x} = 1, \\ (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} &= (x-0)^2\frac{4x^3}{x} = x^2\cdot 4x^2 = 4x^4\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\rho = \infty$. Damit existiert die Lösung y stets auf ganz $\mathbb{R}$ laut Vorlesung.

Schritt 2. Abgewandelten Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (2): Setzen wir den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ in die Differentialgleichung (2) ein, erhalten wir

$$0 = xy''(x) + y'(x) + 4x^3 y(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\, c_n x^{n+r-1} + 4x^3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^{n+r+3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + (n+r) c_n x^{n+r-1}\right] + \sum_{n=3}^{\infty} 4c_{n-3} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1+1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=3}^{\infty} 4c_{n-3} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=3}^{\infty} 4c_{n-3} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1+r)^2 c_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=3}^{\infty} 4c_{n-3} x^{n+r} \\
&= (-1+1+r)^2 c_{-1+1} x^{-1+r} + (0+1+r)^2 c_{0+1} x^{0+r} + (1+1+r)^2 c_{1+1} x^{1+r} + (2+1+r)^2 c_{2+1} x^{2+r} \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} (n+1+r)^2 c_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=3}^{\infty} 4c_{n-3} x^{n+r} \\
&= r^2 c_0 x^{r-1} + (0+1+r)^2 c_1 x^r + (2+r)^2 c_2 x^{r+1} + (3+r)^2 c_3 x^{r+2} \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1+r)^2 c_{n+1} x^{n+r} + 4c_{n-3} x^{n+r}\right] \\
&= r^2 c_0 x^{r-1} + (1+r)^2 c_1 x^r + (2+r)^2 c_2 x^{r+1} + (3+r)^2 c_3 x^{r+2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3}\right] x^{n+r}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, also gilt für r wegen $c_0 \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
r^2 c_0 &= 0 \\
\Leftrightarrow \ r^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \ r &= 0.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$r := r_1 := r_2 := 0$$

d.h. wir sind in Fall 2.

Es muss gelten:

$$
\begin{aligned}
0 &= r^2 c_0 x^{r-1} + (1+r)^2 c_1 x^r + (2+r)^2 c_2 x^{r+1} + (3+r)^2 c_3 x^{r+2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3}\right] x^{n+r} \\
&= 0 + (1+0)^2 c_1 x^0 + (2+0)^2 c_2 x^{0+1} + (3+0)^2 c_3 x^{0+2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+0+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3}\right] x^{n+0} \\
&= 1^2 c_1 \cdot 1 + 2^2 c_2 x^1 + 3^2 c_3 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3}\right] x^n \\
&= 1 \cdot c_1 + 4c_2 x + 9c_3 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3}\right] x^n \\
&= c_1 + 4c_2 x + 9c_3 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3}\right] x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gelten:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 0, \\
4c_2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \ c_2 &= 0, \\
9c_3 &= 0 \\
\Leftrightarrow \ c_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2 c_{n+1} + 4c_{n-3} &= 0 \\
\Leftrightarrow \ (n+1)^2 c_{n+1} &= -4c_{n-3} \\
\Leftrightarrow \ c_{n+1} &= -\frac{4c_{n-3}}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

Da wir nur an einer Lösung interessiert sind und nicht der allgemeinen, wählen wir der Einfachheit hier $c_0 = 1 \neq 0$. Damit gilt induktiv:

$$
\begin{aligned}
c_{4k} &= (-1)^k 4^k \left[\prod_{i=1}^{k} (4k)^2\right]^{-1} c_0 \\
&= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}, \\
c_{4k+1} &= c_{4k+2} = c_{4k+3} = 0
\end{aligned}
$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Schritt 4. Die Lösungen y_1 der Differentialgleichung (2) aufstellen: Da wir im Fall 2. des Satzes sind, lautet die erste Lösung y_1 der Differentialgleichung (2):

$$
y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{4k}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 5. Die Lösung y_2 der Differentialgleichung (2) bestimmen: Da wir im Fall 2. des Satzes sind, hat die zweite Lösung y_2, welche linear unabhängig zur Lösung y_1 ist, der Differentialgleichung (2) die Form:

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\log(x) + x^r \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\
&= y_1(x)\log(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt für die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
y_2'(x) &= y_1'(x)\log(x) + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1}, \\
y_2''(x) &= y_1''(x)\log(x) + \frac{2y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-2}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies eingesetzt in die Differentialgleichung (2) ergibt:

$$
\begin{aligned}
0 &= x y_2''(x) + y_2'(x) + 4x^3 y_2(x) \\
&= \left[x y_1''(x) + y_1'(x) + y_1(x)\right]\log(x) \\
&\quad + 2y_1'(x) - \frac{y_1(x)}{x} + x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-2} \\
&\quad + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} + 4x^3 \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} + 4x^3 \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\
&= \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[2c_{n+1} + (n+1) d_{n+1} + (n+1) d_n\right] x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 4 d_{n-3} x^n \\
&= (2c_1 + d_0) + (2c_2 + 2d_2 + d_1)x + (2c_3 + 6d_3 + 3d_2)x^2 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[2c_{n+1} + (n+1) d_{n+1} + (n+1) d_n + 4d_{n-3}\right] x^n \\
&= d_0 + (2d_2 + d_1)x + (6d_3 + 3d_2)x^2
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[2c_{n+1}+(n+1)\,d_{n+1}+(n+1)\,d_n+4d_{n-3}\right]x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt direkt per Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
d_0 &= 0,\\
d_2 &= \frac{d_1}{2},\\
d_3 &= \frac{d_2}{2},\\
2c_{n+1}+(n+1)\,d_{n+1}+(n+1)\,d_n+4d_{n-3} &= 0\\
\Leftrightarrow\ d_{n+1} &= -\frac{2c_{n+1}+(n+1)\,d_n+4d_{n-3}}{n+1}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Da wir nur an einer Lösung interessiert sind, können wir

$$d_1 = 0$$

wählen, woraus sich

$$d_2 = 0 \text{ und } d_3 = 0$$

ergibt. Damit lautet die zweite Lösung y_2, welche linear unabhängig zu y_1 ist, von der Differentialgleichung (2):

$$y_2(x) = y_1(x)\log(x) + \sum_{n=4}^{\infty} d_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$d_{n+1} = -\frac{2c_{n+1}+(n+1)\,d_n+4d_{n-3}}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. □

(3) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und einer Potenz $r \in \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},\\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,c_n x^{n+r-1},\\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\,c_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Schwache Singularität bei $x_0 = 0$: Setze

$$P(x) := x^2,\ Q(x) := -x,\ R(x) := -\left(x^2+\frac{5}{4}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= P(0) = 0^2 = 0,\\
(x-x_0)\,\frac{Q(x)}{P(x)} &= (x-0)\,\frac{-x}{x^2} = -x\cdot\frac{1}{x} = -1,\\
(x-x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)} &= (x-0)^2\,\frac{-\left(x^2+\frac{5}{4}\right)}{x^2} = -x^2\cdot\frac{x^2+\frac{5}{4}}{x^2} = -x^2-\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\rho = \infty$. Damit existiert die Lösung y stets auf ganz $\mathbb{R}$ laut Vorlesung.

Schritt 2. Abgewandelten Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung (3): Setzen wir den abgewandelten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ in die Differentialgleichung (3) ein, erhalten wir

$$0 = x^2 y''(x) - xy'(x) - \left(x^2+\frac{5}{4}\right)y(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1} - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r} - (n+r)\, c_n x^{n+r}\right] - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{4} c_n x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r} - (n+r)\, c_n x^{n+r} - \frac{5}{4} c_n x^{n+r}\right] - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) - (n+r) - \frac{5}{4}\right] c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1-1) - \frac{5}{4}\right] c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} \\
&= \left[(0+r)(0+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_0 x^{0+r} + \left[(1+r)(1+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_1 x^{1+r} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n\right] x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} \\
&= \left[(0+r)(0+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_0 x^{0+r} + \left[(1+r)(1+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_1 x^{1+r} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n x^{n+r} - c_{n-2} x^{n+r}\right] \\
&= \left[r(r-2) - \frac{5}{4}\right] c_0 x^r + \left[(r+1)(r-1) - \frac{5}{4}\right] c_1 x^{r+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n - c_{n-2}\right] x^{n+r} \\
&= \left(r^2 - 2r - \frac{5}{4}\right) c_0 x^r + \left(r^2 - 1 - \frac{5}{4}\right) c_1 x^{r+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n - c_{n-2}\right] x^{n+r} \\
&= \left(r - \frac{5}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right) c_0 x^r + \left(r^2 - \frac{9}{4}\right) c_1 x^{r+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n - c_{n-2}\right] x^{n+r} \\
&= \left(r - \frac{5}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right) c_0 x^r + \left(r - \frac{3}{2}\right)\left(r + \frac{3}{2}\right) c_1 x^{r+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] c_n - c_{n-2}\right] x^{n+r}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ laut dritter binomischer Formel und der Mitternachtsformel gilt für $r \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
& r^2 - 2r - \frac{5}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} \\
\Leftrightarrow\ & r = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \text{ oder } r = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, also gilt für r wegen $c_0 \neq 0$:

$$
\left(r - \frac{5}{2}\right)\left(r + \frac{1}{2}\right) c_0 = 0
$$

$$\Leftrightarrow \left(r-\frac{5}{2}\right)\left(r+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow r=\frac{5}{2} \text{ oder } r=-\frac{1}{2}.$$

Also ist

$$r_1 := \frac{5}{2} \text{ und } r_2 := -\frac{1}{2}$$

und wegen

$$r_1 - r_2 = \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N}$$

sind wir in Fall 3.
Es muss gelten für $r = r_1 = \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(r_1-\frac{5}{2}\right)\left(r_1+\frac{1}{2}\right)c_0x^{r_1} + \left(r_1-\frac{3}{2}\right)\left(r_1+\frac{3}{2}\right)c_1x^{r_1+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left[(n+r_1)(n+r_1-2)-\frac{5}{4}\right]c_n - c_{n-2}\right]x^{n+r_1} \\
&= 0 + \left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)c_1x^{\frac{5}{2}+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}-2\right)-\frac{5}{4}\right]c_n - c_{n-2}\right]x^{n+\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{2}\cdot\frac{8}{2}\cdot c_1x^{\frac{7}{2}} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}\right]c_n - c_{n-2}\right]x^{n+\frac{5}{2}} \\
&= 1\cdot 4\cdot c_1x^3\sqrt{x} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(n^2+\frac{5}{2}n+\frac{1}{2}n+\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\right)c_n - c_{n-2}\right]x^{n+\frac{5}{2}} \\
&= 4c_1x^3\sqrt{x} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(n^2+\frac{6}{2}n\right)c_n - c_{n-2}\right]x^{n+\frac{5}{2}} \\
&= 4c_1x^3\sqrt{x} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(n^2+3n\right)c_n - c_{n-2}\right]x^{n+\frac{5}{2}} \\
&= 4c_1x^3\sqrt{x} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n+3)c_n - c_{n-2}\right]x^{n+\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelten:

$$\begin{aligned}
4c_1 &= 0 \\
\Leftrightarrow c_1 &= 0, \\
n(n+3)c_n - c_{n-2} &= 0 \\
\Leftrightarrow n(n+3)c_n &= c_{n-2} \\
\Leftrightarrow c_n &= \frac{c_{n-2}}{n(n+3)}
\end{aligned}$$

Da wir nur an einer Lösung interessiert sind und nicht der allgemeinen, wählen wir der Einfachheit hier $c_0 = 1 \neq 0$. Damit gilt induktiv:

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{2k\cdot(2k+3)}\right)c_0 \\
&= \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{2k\cdot(2k+3)}, \\
c_{2k+1} &= 0
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion.
Induktionsanfang (I.A.) $k = 0$: Es gilt:

$$1 = c_0 = c_{2\cdot 0} = \prod_{i=1}^{0}\frac{1}{2i\cdot(2i+3)} = 1,$$
$$0 = c_1 = c_{1\cdot 0+1}.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses k gelte

$$c_{2k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i+3)} \text{ und } c_{2k+1} = 0.$$

Induktionsschluss (I.S.): Es ist nun für $k+1$ mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned}
c_{2(k+1)} = c_{2k+2} &= \frac{c_{2k+2-2}}{(2k+2)\,(2k+2+3)} = \frac{c_{2k}}{(2(k+1))\,(2(k+1)+3)} \\
&= \frac{1}{(2(k+1))\,(2(k+1)+3)} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i+3)} \\
&= \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2i \cdot (2i+3)}, \\
c_{2(k+1)+1} = c_{2k+2+1} = c_{2k+3} &= \frac{c_{2k+3-2}}{(2k+3)\,(2k+3+3)} \\
&= \frac{c_{2k+1}}{(2k+3)\,(2k+6)} = \frac{0}{2\,(2k+3)\,(k+3)} = 0.
\end{aligned}$$

Dies war gerade zu zeigen.
Schritt 4. Die Lösungen y_1 der Differentialgleichung (3) aufstellen: Da wir im Fall 3. des Satzes sind, lautet die erste Lösung y_1 der Differentialgleichung (3):

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{\frac{5}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i+3)} \right) x^{2k} = x^2 \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i+3)} \right) x^{2k}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Die Lösung y_2 der Differentialgleichung (3) bestimmen: Da wir im Fall 3. des Satzes sind, hat die zweite Lösung y_2, welche linear unabhängig zur Lösung y_1 ist, der Differentialgleichung (3) die Form:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= C y_1(x) \log(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\
&= C y_1(x) \log(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Versuch: $C = 0$.
Dann muss für eine Lösung der Form y_2 gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(r_2 - \frac{5}{2}\right) \left(r_2 + \frac{1}{2}\right) d_0 x^{r_2} + \left(r_2 - \frac{3}{2}\right) \left(r_2 + \frac{3}{2}\right) d_1 x^{r_2+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[(n+r_2)\,(n+r_2-2) - \frac{5}{4} \right] d_n - d_{n-2} \right] x^{n+r_2} \\
&= 0 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) d_1 x^{-\frac{1}{2}+1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2} - 2\right) - \frac{5}{4} \right] d_n - d_{n-2} \right] x^{n-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{4}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot c_1 x^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{4} \right] d_n - d_{n-2} \right] x^{n-\frac{1}{2}} \\
&= -2 \cdot d_1 \sqrt{x} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}n + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \right] d_n - d_{n-2} \right] x^{n-\frac{1}{2}} \\
&= -2 \cdot d_1 \sqrt{x} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[n^2 - \frac{6}{2}n \right] d_n - d_{n-2} \right] x^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= -2 \cdot d_1\sqrt{x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left[n^2 - 3n\right] d_n - d_{n-2}\right] x^{n-\frac{1}{2}}$$
$$= -2d_1\sqrt{x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n\left(n-3\right) d_n - d_{n-2}\right] x^{n-\frac{1}{2}}$$

Damit folgt direkt per Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} -2d_1 = 0 \Leftrightarrow \ d_1 &= 0, \\ n\left(n-3\right) d_n - d_{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ n\left(n-3\right) d_n &= d_{n-2} \\ \Leftrightarrow \ d_n &= \frac{d_{n-2}}{n\left(n-3\right)} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Da wir nur an einer Lösung interessiert sind, können wir

$$d_0 = 1$$

wählen. Damit gilt induktiv:

$$\begin{aligned} d_{2k} &= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2k \cdot (2k+3)}\right) d_0 \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2k \cdot (2k+3)}, \\ d_{2k+1} &= 0 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion.
Induktionsanfang (I.A.) $k = 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 = d_0 = d_{2\cdot 0} &= \prod_{i=1}^{0} \frac{1}{2i \cdot (2i+3)} = 1, \\ 0 = d_1 &= c_{1\cdot 0+1}. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses k gelte

$$d_{2k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i-3)} \text{ und } d_{2k+1} = 0.$$

Induktionsschluss (I.S.): Es ist nun für $k+1$ mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned} d_{2(k+1)} = c_{2k+2} &= \frac{c_{2k+2-2}}{(2k+2)\left(2k+2-3\right)} = \frac{c_{2k}}{(2(k+1))\left(2(k+1)-3\right)} \\ &= \frac{1}{(2(k+1))\left(2(k+1)-3\right)} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i-3)} \\ &= \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2i \cdot (2i-3)}, \\ d_{2(k+1)+1} = c_{2k+2+1} = c_{2k+3} &= \frac{c_{2k+3-2}}{(2k+3)\left(2k+3-3\right)} \\ &= \frac{c_{2k+1}}{2k\left(2k+3\right)} = \frac{0}{2k\left(2k+3\right)} = 0. \end{aligned}$$

Dies war gerade zu zeigen.
Damit lautet die zweite Lösung y_2, welche linear unabhängig zu y_1 ist, von der Differentialgleichung (3):

$$\begin{aligned} y_2(x) &= Cy_1(x)\log(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k+1} x^{2k+1} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} x^{2k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2i \cdot (2i-3)} x^{2k} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$