11.12.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

5. Tutoriumsblatt
(wird im Zeitraum 15.12.2019 bis 10.01.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Aufgabe zu dem Satz von Picard-Lindelöff)

Untersuchen Sie stets, ob die Funktion f auf dem angegebenen Rechteck R einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. der zweiten Variablen erfüllt. Weiter prüfen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöff, ob Sie sagen können, dass es eine lokal eindeutige Lösung y für das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf einem gewissen Intervall gibt. Geben Sie weiter das maximale Lösungsintervall $I_{\max}$ an. Wie sehen die ersten Schritte $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ und $y^{(3)}$ der Picard-Iteration aus?

(1) $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 y} \cos(xy)$ auf dem Rechteck $R = [0, 1] \times [-\pi, \pi]$, $x_0 = y_0 = 0$.

(2) $f(x, y) = \sqrt{1 + x + y^2}$ auf dem Rechteck $R = [1, \infty) \times \mathbb{R}$, $x_0 = y_0 = 1$.

(3) $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$ auf dem Rechteck $R = [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $x_0 = y_0 = 0$.

Aufgabe 2 (Lösung von Integralgleichung)

Sei $g \in C^0([0, 1])$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^x f(x - t)\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = g(x) \text{ für alle } x \in [0, 1]$$

genau eine Lösung $f \in C^0([0, 1])$ besitzt. Formulieren Sie dazu zuerst ein geeignetes Fixpunktproblem.

Hinweise:

- Die **schriftliche Klausur** findet am **Freitag**, den **06.03.2020** von **10.30 bis 12.30 Uhr** statt. Genauere Informationen dazu werden in der Vorlesung und Übung, sowie auf der Homepage (siehe unten) veröffentlicht.
- Der **Anmeldeschluss** für diese Klausur ist **Sonntag, der 23.02.2020**. Bitte melden Sie sich zu der Klausur rechtzeitig an und überprüfen Sie ihre Anmeldung. Ein Rücktritt von der Klausur ist bis zu einem Tag vor der Klausur online oder am Tag der Klausur selber noch direkt im Hörsaal ohne Konsequenzen möglich!
- **Warnung**: **Eine spätere Anmeldung als bis zum 23.02.2020 ist nicht möglich!!**
- Die Internetadresse zur Internetseite der Veranstaltung lautet:

  `www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3phys2019w/`