11.12.2019
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

5. Tutoriumsblatt
(wird im Zeitraum 15.12.2019 bis 10.01.2019 besprochen)

Aufgabe 1 (Aufgabe zu dem Satz von Picard-Lindelöff)

Untersuchen Sie stets, ob die Funktion f auf dem angegebenen Rechteck R einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. der zweiten Variablen erfüllt. Weiter prüfen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöff, ob Sie sagen können, dass es eine lokal eindeutige Lösung y für das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf einem gewissen Intervall gibt. Geben Sie weiter das maximale Lösungsintervall $I_{\max}$ an. Wie sehen die ersten Schritte $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ und $y^{(3)}$ der Picard-Iteration aus?

(1) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 y}\cos(xy)$ auf dem Rechteck $R = [0,1] \times [-\pi,\pi]$, $x_0 = y_0 = 0$.

(2) $f(x,y) = \sqrt{1+x+y^2}$ auf dem Rechteck $R = [1,\infty) \times \mathbb{R}$, $x_0 = y_0 = 1$.

(3) $f(x,y) = x\sqrt{|y|}$ auf dem Rechteck $R = [0,\infty) \times \mathbb{R}$, $x_0 = y_0 = 0$.

Lösung von Aufgabe 1

(1) **Stetigkeit**: Die Funktion f ist stetig auf dem Rechteck R.
Lokal-Lipschitzstetig bzgl. der zweiten Variablen: Wir zeigen nun, dass die Funktion f lokal Lipschitz-stetig ist bzgl. der zweiten Komponente, dazu erkennen wir, dass die Funktion zusätzlich stetig differenzierbar ist bzgl. y mit der partiellen Ableitung

$$\begin{aligned} \partial_y f(x,y) &= x^2 \mathrm{e}^{x^2 y}\cos(xy) - \mathrm{e}^{x^2 y} x\sin(xy) \\ &= \mathrm{e}^{x^2 y}\left(x^2\cos(xy) - x\sin(xy)\right) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in R$. So existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung zu jedem $x \in [0,1]$ und $y_1, y_2 \in [-\pi,\pi]$ eine Zwischenstelle $\xi_{y_1,y_2} \in (-\pi,\pi)$ mit

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |\partial_y f(x,\xi_{y_1,y_2}) \cdot (y_1 - y_2)| \\ &=\leq |\partial_y f(x,\xi_{y_1,y_2})|\,|y_1 - y_2| \\ &= \left|\mathrm{e}^{x^2\xi_{y_1,y_2}}\left(x^2\cos(x\xi_{y_1,y_2}) - x\sin(x\xi_{y_1,y_2})\right)\right|\,|y_1 - y_2| \\ &\leq 2\mathrm{e}^{\pi}\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Damit ist die Funktion f bzgl. y auf R lokal Lipschitz-stetig.
Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf: Laut dem Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) existiert eine eindeutige Lösung $y\colon I \to [-\pi,\pi]$ des Anfangswertproblems (1), wobei $I \subseteq [0,1]$ ein Intervall mit $0 \in I$ ist.
Lösungsintervall: In diesem Falle ist es zu kompliziert das maximale Lösungsintervall zu bestimmen, aber wir können vom maximalen Lösungsintervall eine Mindestgröße herausfinden (dies ist hier einfacher und ein ähnliches Vorgehen). Die maximale Lösung ist als Abbildung:

$$y_{\max}\colon I_{\max} = [0,l) \to (-\delta,\delta),$$

wegen $0 = x_0 \in I_{\max}$ und $0 = y_0 \in (-\delta,\delta)$, $y_{\max}(0) = y_{\max}(x_0) = y_0 = 0$ für $\delta \in (0,\pi]$. Setze

$$R_{\varepsilon,\delta} := [0,\varepsilon) \times (-\delta,\delta) \subseteq R.$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \left|\mathrm{e}^{x^2 y}\cos(xy)\right| \\ &\leq \mathrm{e}^{x^2 y}\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in R$ und

$$|f(x,y)| \leq \mathrm{e}^{\varepsilon^2 \delta}$$

für alle $(x,y) \in R_{\varepsilon,\delta}$. Dann gilt auch für die maximale Länge $l_{\max}$:

$$l = \min\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\sup\limits_{(x,y)\in R_{\varepsilon,\delta}} |f(x,y)|}\right\} \geq \min\left\{\varepsilon, \delta\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta}\right\}.$$

Sei
varepsilon $\in (0,1]$ fest. Wir betrachten die Funktion $g\colon (0,\pi] \to (0,\infty), \delta \mapsto \delta\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta}$. Die Funktion g ist glatt mit Ableitungen

$$\begin{aligned}g'(\delta) &= \mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta} - \varepsilon^2\delta\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta} = \left(1-\varepsilon^2\delta\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta}, \\ g''(\delta) &= -\varepsilon^2\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta} - \varepsilon^2\left(1-\varepsilon^2\delta\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta} = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2\delta - 2\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta}\end{aligned}$$

für alle $\delta \in (0,\pi]$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}& 0 = g'(\delta) = \left(1-\varepsilon^2\delta\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\delta} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 1 - \varepsilon^2\delta \\ \Leftrightarrow\ & \delta = \frac{1}{\varepsilon^2},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}g''\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) &= \varepsilon^2\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}} \\ &= \varepsilon(1-2)\mathrm{e}^{-1} = -\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{e}} < 0,\end{aligned}$$

d.h. g hat nur in $\delta = \frac{1}{\varepsilon^2}$ ein Maximum mit

$$g\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\mathrm{e}\varepsilon^2}.$$

Damit folgt nun für ε:

$$\begin{aligned}& \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{e}\varepsilon^2} \\ \Leftrightarrow\ & \varepsilon^3 = \mathrm{e}^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & \varepsilon = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Damit ist die Mindestlänge $l = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$. □

(2) **Stetigkeit**: Die Funktion f ist stetig auf dem Rechteck R.

Lokal-Lipschitzstetig bzgl. der zweiten Variablen: Wir zeigen nun, dass die Funktion f lokal Lipschitz-stetig ist bzgl. der zweiten Komponente, dazu erkennen wir, dass die Funktion zusätzlich stetig differenzierbar ist bzgl. y mit der partiellen Ableitung

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{1+x+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+x+y^2}}$$

für alle $(x,y) \in R$. So existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung zu jedem $x \in [1,\infty)$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ eine Zwischenstelle $\xi_{y_1,y_2} \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\left|f\left(x,y_1\right) - f\left(x,y_2\right)\right| &= \left|\partial_y f\left(x,\xi_{y_1,y_2}\right)\cdot\left(y_1-y_2\right)\right| \\ &=\leq \left|\partial_y f\left(x,\xi_{y_1,y_2}\right)\right|\left|y_1-y_2\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{y}{\sqrt{1+x+\xi_{y_1,y_2}^2}} \right| |y_1 - y_2| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\xi_{y_1,y_2}^2} + \frac{x}{\xi_{y_1,y_2}^2} + 1}} |y_1 - y_2| \\
&\leq |y_1 - y_2|
\end{aligned}
$$

mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Damit ist die Funktion f bzgl. y auf R lokal Lipschitz-stetig.
Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf: Laut dem Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) existiert eine eindeutige Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems (2), wobei $I \subseteq [1, \infty]$ ein Intervall mit $1 \in I$ ist.
Lösungsintervall: Die maximale Lösung ist als Abbildung:

$$
y_{\max}\colon I_{\max} = [1, 1+l) \to (1-\delta, 1+\delta),
$$

wegen $1 = x_0 \in I_{\max}$ und $1 = y_0 \in (1-\delta, 1+\delta)$, $y_{\max}(1) = y_{\max}(x_0) = y_0 = 1$ für $\delta \in (0, \infty)$. Setze

$$
R_{\varepsilon,\delta} := [1, 1+\varepsilon) \times (1-\delta, 1+\delta) \subseteq R.
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in R_{\varepsilon,\delta}} |f(x,y)| &= \sup_{(x,y)\in R_{\varepsilon,\delta}} \sqrt{1+x+y^2} \\
&= \sqrt{1+(1+\varepsilon)+(1+\delta)^2} \\
&= \sqrt{2+\varepsilon+(1+2\delta+\delta^2)} \\
&= \sqrt{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2}.
\end{aligned}
$$

Dann gilt auch für die maximale Länge $l_{\max}$:

$$
l = \min\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\sup\limits_{(x,y)\in R_{\varepsilon,\delta}} |f(x,y)|}\right\} = \min\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\sqrt{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2}}\right\}.
$$

Sei $\varepsilon \in (0, \infty)$ fest. Wir betrachten die Funktion $g\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \delta \mapsto \frac{\delta}{\sqrt{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2}}$. Die Funktion g ist glatt mit Ableitungen

$$
\begin{aligned}
g'(\delta) &= \frac{\sqrt{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2} - \frac{2\delta+2\delta^2}{2\sqrt{1+\varepsilon+2\delta+\delta^2}}}{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2} \\
&= \frac{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2-\delta-\delta^2}{(3+\varepsilon+2\delta+\delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3+\varepsilon+\delta}{(3+\varepsilon+2\delta+\delta^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

für alle $\delta \in (0, \infty)$. Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
& 0 = g'(\delta) = \frac{3+\varepsilon+\delta}{(3+\varepsilon+2\delta+\delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\Leftrightarrow\ & 0 = 3+\varepsilon+\delta \\
\Leftrightarrow\ & \delta = -3-\varepsilon < 0,
\end{aligned}
$$

damit hat g kein Extremum auf $(0, \infty)$, aber die Funktion g ist streng monoton wachsend wegen

$$
g'(\delta) = \frac{3+\varepsilon+\delta}{(3+\varepsilon+2\delta+\delta^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,
$$

und es gilt:

$$
\begin{aligned}
g(\delta) &= \frac{\delta}{\sqrt{3+\varepsilon+2\delta+\delta^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{\delta^2}+\frac{\varepsilon}{\delta^2}+\frac{2}{\delta}+1}}
\end{aligned}
$$

$$\to 1$$

für $\delta \to \infty$. Also ist

$$\sup_{\delta \in (0,\infty)} |g(\delta)| = \lim_{\delta \to \infty} g(\delta) = 1.$$

Damit folgt nun für ε:

$$\varepsilon = 1$$

Damit ist die Mindestlänge $l = 1$.
Picard-Iteration:
Die ersten drei Schritte lauten:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1,\\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x f(t,1)\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \sqrt{2+t}\mathrm{d}t = 1 + \left[\frac{2}{3}(2+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x\\
&= 1 - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}},\\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x f\left(t, y_1(t)\right)\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \sqrt{1 + t + \left(1 - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}(2+t)^{\frac{3}{2}}\right)^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

(3) **Stetigkeit**: Die Funktion f ist stetig auf dem Rechteck R.
Lokal-Lipschitzstetig bzgl. der zweiten Variablen: Wir untersuchen nun die Funktion f auf lokale Lipschitz-Stetigkeit bzgl. der zweiten Komponente, dazu erkennen wir, dass die Funktion zusätzlich stetig differenzierbar ist bzgl. y mit der partiellen Ableitung

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x \operatorname{sign}(y)}{2\sqrt{|y|}}$$

für alle $(x,y) \in R$ mit $y \neq 0$. Also ist die partielle Ableitung unstetig in allen Punkten der Form $(x,0)$, $x \in [0,\infty)$, und somit kann f nicht lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variable sein. □

Aufgabe 2 (Lösung von Integralgleichung)

Sei $g \in C^0([0,1])$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int\limits_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = g(x) \text{ für alle } x \in [0,1]$$

genau eine Lösung $f \in C^0([0,1])$ besitzt. Formulieren Sie dazu zuerst ein geeignetes Fixpunktproblem.

Lösung von Aufgabe 2

Bekannt ist, dass der Raum $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum (vollständiger normierter Vektorraum) ist. So ist auch die Menge $C^0[0,1]$ abgeschlossen und nicht-leer. Wir definieren den Operator $T\colon C^0[0,1] \to C^0[0,1]$ durch

$$(Tf)(x) = g(x) + \int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,\ x \in [0,1].$$

Der Operator T ist wohl-definiert, da die rechte Seite eine Verkettung und Summe stetiger Funktionen ist und damit selber wieder stetig auf $[0,1]$. Wir zeigen, dass der Operator T eine Kontraktion ist, seien dazu $x \in [0,1]$ und $f_1, f_2 \in C^0[0,1]$ beliebig, so gilt per Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left|(Tf_1)(x) - (Tf_2)(x)\right| &= \left|g(x) + \int_0^x f_1(x-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t - \left(g(x) + \int_0^x f_2(x-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\int_0^x \left(f_1(x-t) - f_2(x-t)\right)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^x \left|f_1(x-t) - f_2(x-t)\right|\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \sup_{s\in[0,1]} |f_1(s) - f_2(s)| \\
&\leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \sup_{s\in[0,1]} |f_1(s) - f_2(s)| \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\|f_1 - f_2\|_\infty \\
&< \frac{9}{10}\|f_1 - f_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun:

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|(Tf_1)(x) - (Tf_2)(x)\right| \leq \frac{9}{10}\|f_1 - f_2\|_\infty,$$

d.h. T ist eine Kontraktion. So sind alle Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt und nach diesen existiert genau eine Funktion $f_* \in C^0[0,1]$ mit

$$f_*(x) = (Tf_*)(x) = g(x) + \int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ für alle } x \in [0,1].$$

Dies ist äquivalent zu

$$f_*(x) - \int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = g(x) \text{ für alle } x \in [0,1].$$

Dies war zu zeigen. □