08.01.2020
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Homogene Anfangswertprobleme)

Lösen Sie erst die folgenden Differentialgleichungssysteme allgemein und anschließend das jeweils dazugehörige Anfangswertproblem.

(1)
$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)
$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 1

(1) Es handelt sich um ein homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3+\lambda)(1+\lambda) - 1 - 2 + (3+\lambda) - \lambda - 2(1+\lambda) \\ &= -\lambda(3+\lambda)(1+\lambda) - 2(1+\lambda) \\ &= -(1+\lambda)\left(\lambda(3+\lambda) + 2\right) \\ &= -(1+\lambda)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2\right) \\ &= -(1+\lambda)^2(2+\lambda), \end{aligned}$$

z.B. laut der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}.$$

Also hat p eine einfache Nullstelle bei $\lambda = -2$ und eine doppelte in $\lambda = -1$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_{-2} = \ker(A - (-2) \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \\
E_{-1} &= \ker\left(A - 3 \cdot I_3\right) = \ker\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Hier benötigen wir noch zusätzlich den ersten Hauptraum zu -1, denn da stimmen die geometrische und die algebraische Vielfachheit nicht überein.
Es gilt dafür:

$$
\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
H_{-1} &= \ker\left(A - (-1)I_3\right)^2 = \ker\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die ersten zwei Fundamentallösungen lauten

$$
t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \; t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.
$$

Die dritte Fundamentallösung berechnet sich durch:

$$
\begin{aligned}
\Phi_3(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{t^1}{1!}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Damit lautet die homogene Lösung

$$
y_h(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$
\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = y(0) = C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
$$

Dies liefert direkt $C_1 = C_3 = 0$ und $C_2 = 1$. Damit lautet die spezielle Lösung von (1)

$$
y(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

(2) Es handelt sich um ein homogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \left[(1-\lambda)^2 + 4 \right] \end{aligned}$$

Also hat p drei einfache Nullstelle bei $\lambda = 1$ und $\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}$.

Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_1 = \ker(A - 1 \cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{1-2\mathrm{i}} = \ker(A - (1-2\mathrm{i}) \cdot I_3) &= \ker \ker \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2 & 2\mathrm{i} & -2 \\ 3 & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die erste Fundamentallösungen lautet

$$t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die zweite und dritte Fundamentallösung berechnet sich durch Real bzw. Imaginärteil von dem folgenden:

$$\begin{aligned} \Phi_{2,3}(t) &= \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t \left(\cos(2t) - \mathrm{i} \sin(2t) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) + \mathrm{i} \cos(2t) \\ -\cos(2t) + \mathrm{i} \sin(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

laut Eulerformel bzw. der Formel von de Moivre. Damit lautet die homogene Lösung

$$
y_h(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Dies liefert direkt $C_1 = C_3 = 0$ und $C_2 = -1$. Damit lautet die spezielle Lösung von (2)

$$
y(t) = -e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 (Inhomogene Anfangswertprobleme)

Bestimmen Sie zuerst die allgemeine reellwertige Lösung vom inhomogenen Differentialgleichungssystem und anschließend die spezielle reellwertige Lösung vom inhomogenen Anfangswertproblem:

(1)
$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)
$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} y + \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 2

(1) Es handelt sich um ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(A - \lambda I_2\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 + 1. \end{aligned}$$

Also hat p zwei einfache Nullstellen bei $\lambda = 1 \pm \mathrm{i}$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für den Eigenraum:

$$\begin{aligned} E_{1-\mathrm{i}} &= \ker\left(A - (1-\mathrm{i}) \cdot I_2\right) = \ker\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die beiden Fundamentallösungen ergeben sich durch Real- und Imaginärteil von

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{t}\left(\cos(-t) + \mathrm{i}\sin(-t)\right)\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{t}\left(\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t)\right)\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) + \mathrm{i}\cos(t) \\ -\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{t}\left(\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

laut der Eulerformel. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach

$$y_h(t) = C_1\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Partikuläre Lösung aufstellen/ Variation der Konstanten: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$y_p(t) = C_1(t)\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} + C_2(t)\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned}
&C_1(t)\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}+C_2(t)\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ &C'(t)=(C_1'(t),C_2'(t),C_3'(t))=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\sin(t)&\cos(t)\\-\cos(t)&\sin(t)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösen wir dies (Inverse Matrix berechnen und mit dem Vektor multiplizieren), dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\sin(t)&\cos(t)\\-\cos(t)&\sin(t)\end{pmatrix}^{-1}&=\frac{1}{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\begin{pmatrix}\sin(t)&-\cos(t)\\\cos(t)&\sin(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(t)&-\cos(t)\\\cos(t)&\sin(t)\end{pmatrix},\\
C'(t)&=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\sin(t)&-\cos(t)\\\cos(t)&\sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-\sin^2(t)-\cos^2(t)\\-\sin(t)\cos(t)+\sin(t)\cos(t)\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, C_1'(t) &=-\mathrm{e}^{-t},\\
C_2'(t)&=0,
\end{aligned}$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras, d.h.

$$\begin{aligned}
C_1(t)&=\mathrm{e}^{-t},\\
C_2(t)&=0.
\end{aligned}$$

Also ist die partikuläre Lösung:

$$y_p(t)=\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}$$

für alle $t\in\mathbb{R}$.

Schritt 5. Allgemeine Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
y(t)&=y_p(t)+y_h(t)\\
&=\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}+C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t\in\mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Schritt 6. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=y(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

so sehen wir direkt, dass $C_1-\frac{3}{2}$ und $C_2=\frac{1}{2}$ gelten muss. Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned}
y(t)&=\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\sin(t)\\-\cos(t)\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{e}^t}{2}\begin{pmatrix}\cos(t)-3\sin(t)\\3\cos(t)+\sin(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t\in\mathbb{R}$. □

(2) Es handelt sich um ein inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt:

$$\begin{aligned}
p(\lambda)&=\det(A-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&2\\3&-\lambda\end{pmatrix}\\
&=-\lambda(1-\lambda)-6=\lambda^2-\lambda-6\\
&=(\lambda+2)(\lambda-3),
\end{aligned}$$

z.B. laut Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-(-24)}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}-2\\3\end{cases}.$$

Also hat p zwei einfache Nullstellen bei $\lambda = -2$ und bei $\lambda = 3$.
Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für den Eigenraum:

$$\begin{aligned}
E_{-2} &= \ker\left(A - (-2) \cdot I_2\right) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \\
E_3 &= \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung: Die beiden Fundamentallösungen lauten nun

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \Phi_2(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach

$$y_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Partikuläre Lösung aufstellen/ Variation der Konstanten: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$y_p(t) = C_1(t) \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(t) \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert nun

$$\begin{aligned}
C_1(t) \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2(t) \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \ C'(t) = (C_1'(t), C_2'(t)) &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-5t} \\ -3 & \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-5t} \\ -3 & \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösen wir dies (Inverse Matrix berechnen und mit dem Vektor multiplizieren), dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-5t} \\ -3 & \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2\mathrm{e}^{5t} + 3\mathrm{e}^{5t}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} & \mathrm{e}^{5t} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} && \\
&= \frac{1}{5\mathrm{e}^{5t}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} & -\mathrm{e}^{5t} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} C'(t) && = \frac{\mathrm{e}^{-4t}}{5} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} & -\mathrm{e}^{5t} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-4t}}{5} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{5t} \\ 2 \end{pmatrix} C_1'(t) && = -\frac{\mathrm{e}^{t}}{5}, \\
C_2'(t) &= \frac{2}{5} \mathrm{e}^{-4t}, &&
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= -\frac{\mathrm{e}^{t}}{5}, \\
C_2(t) &= -\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{10}.
\end{aligned}$$

Also ist die partikuläre Lösung:

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{5}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{10}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Allgemeine Lösung: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_p(t) + y_h(t)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + C_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 6. Spezielle Lösung: Wegen der Anfangswertbedingung muss gelten:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = y(0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} &= C_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ C = \begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2-(-3)}\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix},\\
C = \begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}2\\11\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

d.h. $C_1 = \frac{1}{5}$ und $C_2 = \frac{11}{10}$. Die Lösung lautet:

$$
y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{5}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \frac{11}{10}\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 3 (Matrixexponentialfunktion)

Bestimmen Sie jeweils die Matrixexponentialfunktion $\exp(tA)$ für die Matrizen

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 3

(1) Hier können wir durch geschickte Zerlegung direkt mit der Definition arbeiten.
Schritt 1. Zerlegung der Matrix A: Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =: I_3 + B.$$

Schritt 2. Vertauschbarkeit prüfen: Nun ist weiter:

$$I_3 B = B = B I_3.$$

Also erhalten wir laut Vorlesung:

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t(I_3+B)} = \mathrm{e}^{tI_3}\mathrm{e}^{tB}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Einzelne Exponentialmatrizen ausrechnen: Für e^{tI_3} gilt per Definition:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tI_3} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tI_3)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i I_3^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} I_3 \\ &= \mathrm{e}^t I_3 \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von e^{tB} berechnen wir:

$$\begin{aligned} B^0 &= I_3, \\ B^1 &= B, \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq 3}. \end{aligned}$$

So ergibt sich per Definition

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tB} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tB)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i B^i}{i!} = \sum_{i=0}^{2} \frac{t^i}{B^i} \\ &= \frac{t^0}{0!}B^0 + \frac{t^1}{1!}B^1 + \frac{t^2}{2!}B^2 = I_3 + tB + \frac{t^2}{2}B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 \\ 3t & 2t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2+3t & 2t & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. e^{tA} **bestimmen**: Es ergibt sich per Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{tI_3}\mathrm{e}^{tB} \\ &= \mathrm{e}^t I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2+3t & 2t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2+3t & 2t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 2t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t & 0 \\ 2t^2\mathrm{e}^t+3t\mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$(2) Das Vorgehen ist im Grunde wie beim Lösen der homogenen Gleichung in Aufgabe 1.

Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen: Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A-\lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)+5 = \left(3-\lambda-3\lambda+\lambda^2\right)+5 \\ &= \lambda^2-4\lambda+8 = (2+2\mathrm{i}-\lambda)(2-2\mathrm{i}-\lambda), \end{aligned}$$

z.B. laut der Mitternachtsformel:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm 4\mathrm{i}}{2} = 2 \pm 2\mathrm{i}.$$

Also hat p zwei einfache Nullstelle bei $\lambda = 2 \pm 2\mathrm{i}$.

Schritt 2. Eigenräume und Haupträume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_{2-2\mathrm{i}} &= \ker(A-(2-2\mathrm{i})\cdot I_2) \qquad = \ker \begin{pmatrix} -1+2\mathrm{i} & 5 \\ -1 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 5 & -5(1+2\mathrm{i}) \\ -1 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & -(1+2\mathrm{i}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung/ Aufstellen der Fundamentalmatrix: Die beiden Fundamentallösung ergeben sich durch Real- und Imaginärteil bilden von

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(2-2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(-2t)+\mathrm{i}\sin(-2t)\right)\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(2t)-\mathrm{i}\sin(2t)\right)\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(2t)+2\sin(2t)+2\mathrm{i}\cos(2t)-\mathrm{i}\sin(2t) \\ \cos(2t)-\mathrm{i}\sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix} \cos(2t)+2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 2\cos(2t)-\sin(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \cos(2t)+2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t)-\sin(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. die Fundamentalmatrix lautet:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right) & \mathrm{e}^{2t}\left(2\cos(2t)-\sin(2t)\right) \\ \mathrm{e}^{2t}\cos(2t) & \mathrm{e}^{2t}-\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix}, \\
\Phi(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Phi(0)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schritt 4. Matrixexponentialfunktion aufstellen: Es gilt laut Vorlesung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) & -\sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) & 2\cos(2t) + 4\sin(2t) - 2\cos(2t) + \sin(2t) \\ \cos(2t) & \\ -\sin(2t) & \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) & 5\sin(2t) \\ \cos(2t) & \\ -\sin(2t) & \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sin(2t)}{2} \right]
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$