24.01.2020
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Inhomogene Transportgleichung)

Lösen Sie das folgende inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{cases} 2\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = 2\sin(t)\mathrm{e}^{-\cos(t)} \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}.$$

Lösung von Aufgabe 1

Schritt 1. Setting aufstellen: Die partielle Differentialgleichung ist äquivalent zu der folgenden Gleichung:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{3}{2}\partial_x u(t,x) = \sin(t)\mathrm{e}^{-\cos(t)}, \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}. \end{cases}$$

Es handelt sich um eine lineare (inhomogene) Transportgleichung. In diesem Fall lautet:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2}, \\ f(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\ g(t,x) &= \sin(t)\mathrm{e}^{-\cos(t)} \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und die Funktion g ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sowie insbesondere stetig partiell differenzierbar nach x.

Schritt 2. Lösungsformel anwenden: Es muss also für die Lösung u gelten:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x-at) + \int_0^t g(r, x-a(t-r))\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{3}{2}t\right)^2}{2}} + \int_0^t \sin(r)\mathrm{e}^{-\cos(r)}\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{3}{2}t\right)^2}{2}} + \left[\mathrm{e}^{-\cos(r)}\right]_0^t \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{3}{2}t\right)^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\cos(t)} - \mathrm{e}^{\cos(0)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\left(x-\frac{3}{2}t\right)^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\cos(t)} - \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 (Charakteristiken-Verfahren)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mithilfe eines Charakteristiken-Verfahren:

(1)

$$\begin{cases} (2y-3x)\partial_x u(x,y) - y\partial_y u(x,y) = y^2\left(2y-5x\right), \\ u(x,1) = x+1. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

wobei die Funktion $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1, \\ -x \text{ für } -1 < x \leq 0, \\ 0 \text{ für } x > 0. \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 2

(1) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$\begin{aligned} a(x,y,u) &= \begin{pmatrix} 2y-3x \\ -y \end{pmatrix}, \\ b(x,y,u) &= y^2\left(2y-5x\right), \\ f(x) &= x+1. \end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(x,y,u)\cdot\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u(x,y) = b(x,y,u) \\ u(x,1) = f(x) \end{cases}.$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k:

$$k(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u\right)(k(s))\cdot k'(s) = k'(s)\cdot\left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u\right) \\ a(k(s),w(s))\cdot\left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u\right) &= b(k(s),w(s)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = k'(s) &= a(k(s),w(s)) = \begin{pmatrix} 2y(s)-3x(s) \\ -y(s) \end{pmatrix}, \\ w'(s) &= b(k(s),w(s)) = y^2(s)\left(2y(s)-5x(s)\right), \\ k(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ w(0) = u(k(0)) &= u\left(x_0,1\right) = x_0+1. \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:
Lösung für k: Es handelt sich bei x wie bei y um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:
Lösung der homogenen Gleichung für $y(\cdot)$:

$$y(s) = C_2 \mathrm{e}^{-s},$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstante $C_2 \in \mathbb{R}$. So erhalten wir für $x(\cdot)$:

$$x'(s) = 2y(s) - 3x(s) = -3x(s) + 2C_2\mathrm{e}^{-s}.$$

Lösung der homogenen Gleichung für $x(\cdot)$: Diese lautet

$$x_h(s) = C_1\mathrm{e}^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ für eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$.
Variation der Konstanten/ Partikuläre Lösung: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$x_p(s) = C(s)\mathrm{e}^{-3s}.$$

So gilt für die Ableitung

$$x'p(s) = C'(s)\mathrm{e}^{-3s} - 3C(s)\mathrm{e}^{-3s} = C'(s)\mathrm{e}^{-3s} - 3x_p(s).$$

Demnach gilt eingesetzt in die inhomogene Gleichung:

$$\begin{aligned} C'(s)\mathrm{e}^{-3s} - 3x_p(s) = x_p'(s) = -3x_p(s) + 2C_2\mathrm{e}^{-s} \\ \Leftrightarrow\ C'(s)\mathrm{e}^{-3s} = 2C_2\mathrm{e}^{-s} \\ \Leftrightarrow\ C'(s) = 2C_2\mathrm{e}^{2s}. \end{aligned}$$

Also muss für $C(\cdot)$ gelten:

$$C(s) = \int 2C_2\mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}s = C_2\mathrm{e}^{2s}.$$

Dies bedeutet für die partikuläre Lösung

$$x_p(s) = C(s)\mathrm{e}^{-3s} = C_2\mathrm{e}^{-s}.$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Allgemeine Lösung für $x(\cdot)$: Die allgemeine Lösung für $x(\cdot)$ ist damit

$$x(s) = x_p(s) + x_h(s) = C_2\mathrm{e}^{-s} + C_1\mathrm{e}^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.
Spezielle Lösung für $x(\cdot)$ **und** $y(\cdot)$: Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = k_2(0) = 1$ erhalten wir:

$$C_2 = C_2\mathrm{e}^{-0} = y(0) = 1.$$

Damit gilt:

$$y(s) = \mathrm{e}^{-s} \text{ und } x(s) = \mathrm{e}^{-s} + C_1\mathrm{e}^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = k_1(0) = x_0$ folgt so:

$$x_0 = x(0) = \mathrm{e}^{-0} + C_1\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = 1 + C_1 \ \Leftrightarrow\ C_1 = x_0 - 1,$$

und damit lautet $x(\cdot)$:

$$x(s) = \mathrm{e}^{-s} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-3s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. **Lösung für** w: Einsetzen in die Differentialgleichung von w von $x(\cdot)$ und $y(\cdot)$ liefert:

$$\begin{aligned} w'(s) &= y^2(s)\,(2y(s) - 5x(s)) = \mathrm{e}^{-2s}\left(2\mathrm{e}^{-s} - 5\left(\mathrm{e}^{-s} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-3s}\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2s}\left(-3\mathrm{e}^{-s} - 5\,(x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-3s}\right) \\ &= -3\mathrm{e}^{-3s} - 5\,(x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-5s}. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung für w:

$$w(s) = \int \left(-3\mathrm{e}^{-3s} - 5\,(x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-5s}\right)\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-3s} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-5s} + C_3$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $C_3 \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung $w(0) = x_0 + 1$ muss

$$x_0 + 1 = w(0) = \mathrm{e}^{-3\cdot 0} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-5\cdot 0} + C_3 = 1 + (x_0 - 1) + C_3 = x_0 + C_3 \ \Leftrightarrow\ C_3 = 1$$

gelten. Damit ist

$$w(s) = \mathrm{e}^{-3s} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-5s} + 1$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Nach s, x_0 auflösen und Einsetzen: Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x(s) &= \mathrm{e}^{-s} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-3s} \\ \Leftrightarrow\ (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-3s} &= x(s) - \mathrm{e}^{-s} \\ \Leftrightarrow\ x_0 - 1 &= x(s)\mathrm{e}^{3s} - \mathrm{e}^{2s} \\ \Leftrightarrow\ x_0 &= x(s)\mathrm{e}^{3s} - \mathrm{e}^{2s} + 1. \end{aligned}$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s)) = u(k(s)) = w(s) &= \mathrm{e}^{-3s} + (x_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-5s} + 1 \\ &= \mathrm{e}^{-3s} + \left(x(s)\mathrm{e}^{3s} - \mathrm{e}^{2s}\right)\mathrm{e}^{-5s} + 1 \\ &= \mathrm{e}^{-3s} + x(s)\mathrm{e}^{-2s} - \mathrm{e}^{-3s} + 1 \\ &= x(s)\mathrm{e}^{-2s} + 1 \\ &= x(s)y^2(s) + 1 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung lautet

$$u(x, y) = xy^2 + 1$$

für alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$(2) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$\begin{aligned} a(t, x, u) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u(t, x) \end{pmatrix}, \\ b(t, x, u) &= 0, \\ f(x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(t, x, u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u(t, x) = b(t, x, u) \\ u(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k:

$$k(s) = \begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u\right)(k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u\right) \\ a(k(s), w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} u\right) &= b(k(s), w(s)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = k'(s) = a(k(s), w(s)) &= \begin{pmatrix} 1 \\ w(s) \end{pmatrix}, \\ w'(s) = b(k(s), w(s)) &= 0, \\ k(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ w(0) = u(k(0)) = u(x_0, 1) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:
Lösung für k: Es handelt sich bei t wie bei w um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:

$$t(s) = s + C_1,$$

$$w(s) = C_3$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_3 \in \mathbb{R}$. So erhalten wir für $x(\cdot)$:

$$x'(s) = w(s) = C_3.$$

Dies lässt sich Lösen durch

$$x(s) = C_3 s + C_2$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $C_2 \in \mathbb{R}$.

Spezielle Lösung für $t(\cdot), x(\cdot)$ und $w(\cdot)$: Wegen $w(0) = u_0(x_0)$ folgt:

$$u_0(x_0) = w(0) = C_3,$$

d.h.

$$w(s) = u_0(x_0)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Für $t(\cdot)$ folgt:

$$0 = t(0) = 0 + C_1 = C_1,$$

d.h.

$$t(s) = s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Als letztes gilt nun wegen $x(0) = x_0$:

$$x_0 = x(0) = u_0(x_0) \cdot 0 + C_2 = C_2,$$

d.h.

$$x(s) = u_0(x_0)\, s + x_0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Nach s, x_0 auflösen und Einsetzen: Es gilt:

$$s = t(s)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir je nachdem in welchem Fall wir sind.

Fall 1. $x_0 \leq 1$: Es gilt:

$$\begin{aligned} x(s) &= u_0(x_0)\, s + x_0 = s + x_0 \\ \Leftrightarrow\ x_0 &= x(s) - s = x(s) - t(s). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$u(t(s), x(s)) = u(k(s)) = w(s) = u_0(x_0) = 1 = u_0(x_0) = u_0(x(s) - t(s)) = 1.$$

Fall 2. $-1 < x_0 \leq 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned} x(s) &= u_0(x_0)\, s + x_0 = -x_0 s + x_0 = (1-s)x_0 = (1-t(s))x_0 \\ \Leftrightarrow\ x_0 &= \frac{x(s)}{1-t(s)}. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} u(t(s), x(s)) = u(k(s)) = w(s) = u_0(x_0) &= -x_0 \\ &= -\frac{x(s)}{1-t(s)} = \frac{x(s)}{t(s)-1}. \end{aligned}$$

Fall 3. $x_0 > 0$: Es gilt:

$$x(s) = u_0(x_0)\, s + x_0 = x_0.$$

Einsetzen liefert

$$u(t(s), x(s)) = u(k(s)) = w(s) = u_0(x_0) = 0 = u_0(x(s)) = 0.$$

Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung lautet

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \begin{cases} 1, \text{ für } x - t \leq -1 \\ \frac{x}{t-1}, \text{ für } (t-1) < x \leq 0 \\ 0, \text{ für } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, \text{ für } x \leq t-1 \\ \frac{x}{t-1}, \text{ für } (t-1) < x \leq 0 \\ 0, \text{ für } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

für alle Paare $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. □

Aufgabe 3 (Radialsymmetrische Lösungen)

Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ von der partiellen Differentialgleichung

$$x \cdot \nabla u(x) + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} u(x) + \|x\| \, u^2(x) = 0,$$

wobei mit $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ die euklidische Norm gemeint ist, d.h.

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Eine radialsymmetrische Funktion u auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist eine Funktion $u \colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ so, dass eine weitere Funktion $g \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$u = g \circ r \text{ auf } \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

wobei r die Normfunktion ist, d.h.

$$r \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty), x \mapsto \|x\|.$$

Lösung von Aufgabe 3

Schritt 1. Radialsymmetrische Bedingung: Sei u eine Lösung so, dass es eine Funktion $g \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = g(\|x\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Schritt 2. Ableitungen berechnen: Seien $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} r(x) &= \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}, \\
\partial_{x_i} u(x) &= g'(\|x\|) \cdot \partial_{x_i} r(x) = \frac{x_i g'(\|x\|)}{\|x\|}, \\
\nabla u(x) &= \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Einsetzen in die Partielle Differentialgleichung: Wir erhalten durch Schritt 2. für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:

$$\begin{aligned}
0 &= x \cdot \nabla u(x) + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} u(x) + \|x\| \, u^2(x) \\
&= x \cdot \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} x + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} g(\|x\|) + \|x\| \, g^2(\|x\|) \\
&= \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|} \|x\|^2 + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} g(\|x\|) + \|x\| \, g^2(\|x\|) \\
&= \|x\| \, g'(\|x\|) + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} g(\|x\|) + \|x\| \, g^2(\|x\|) \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= g'(\|x\|) + \frac{1}{1+\|x\|} g(\|x\|) + g^2(\|x\|) \\
&= g'(r(x)) + \frac{1}{1+r(x)} g(r(x)) + g^2(r(x)).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung auf $(0,\infty)$

$$g' + \frac{1}{1+r} g + g^2 = 0.$$

Schritt 4. Lösen der Gewöhnlichen Differentialgleichung: Es handelt sich um eine homogene Ricatti-Differentialgleichung.
Substitution und Umformen: Wir setzen $h := g^{1-2} = g^{-1}$, so gilt:

$$h' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Dies liefert uns durch Umstellen der Differentialgleichung:

$$g' + \frac{1}{1+r} g + g^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ -\frac{g'}{g^2} - \frac{1}{1+r}\frac{1}{g} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ h' - \frac{1}{1+r}h - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Für h haben wir so eine lineare inhomogene Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ erhalten.
Lösung der homogenen Gleichung: Die damit verbundene Lösung der homogenen Gleichung ist auf $(0, \infty)$

$$h_h(r) = C\mathrm{e}^{\int \frac{1}{1+r}\mathrm{d}r} = C\mathrm{e}^{\log(1+r)} = C(1+r).$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. **Partikuläre Lösung**: Motiviert durch die Lösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz:

$$h_p(r) = C(r)(1+r).$$

Abgeleitet erhalten wir

$$h_p'(r) = C'(r)(1+r) + C(r).$$

Eingesetzt in die inhomogene Gleichung folgt nun:

$$
\begin{aligned}
0 &= h_p' - \frac{1}{1+r}h_p - 1 \\
&= C'(r)(1+r) + C(r) - \frac{C(r)(1+r)}{1+r} - 1 = C'(r)(1+r) + C(r) - C(r) - 1 = C'(r)(1+r) - 1 \\
\Leftrightarrow\ C'(r) &= \frac{1}{1+r}.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$C(r) = \int \frac{1}{1+r}\mathrm{d}r = \log(1+r).$$

Damit lautet die partikuläre Lösung nun

$$h_p(r) = C(r)(1+r) = (1+r)\log(1+r)$$

für alle $r \in (0, \infty)$.
Allgemein Lösung h: Die allgemeine Lösung für h lautet:

$$h(r) = h_p(r) + h_h(r) = (1+r)\log(1+r) + C(1+r)$$

für alle $r \in (0, \infty)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Rücksubstitution: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
g(r) &= \frac{1}{h(r)} \\
&= \frac{1}{(1+r)\log(1+r) + C(1+r)} \\
&= \frac{1}{(1+r)\left[\log(1+r) + C\right]}
\end{aligned}
$$

für alle

$$r \in (0, \infty) \setminus \{r \in (0, \infty) :\ \log(1+r) = -C\}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Schritt 5. Radialsymmetrische Lösungen: Damit folgt für die radialsymmetrischen Lösungen u:

$$u(x) = g\left(\|x\|\right) = \frac{1}{(1+\|x\|)\left[\log\left(1+\|x\|\right) + C\right]}$$

für alle

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n :\ \log\left(1+\|x\|\right) = -C\}$$

und Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Soll nun die Lösung auf ganz $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren, so müssen wir $C \in [0, \infty)$, d.h.

$$u(x) = \frac{1}{(1+\|x\|)\left[\log\left(1+\|x\|\right) + C\right]} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

mit einer nicht-negativen Konstanten C. $\square$