31.01.2020
Dr. Ioannis Anapolitanos
M.Sc. Michael Ullmann

Höhere Mathematik III für Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Separationsansatz)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) &= 0,\\ u(t,0) &= u(t,\pi),\\ \partial_x u(t,0) &= \partial_x u(t,\pi).\end{aligned}$$

(a) Finden Sie alle Lösungen u des obigen Randwertproblems, die eine separierte Form $u(t,x) = v(t)w(x)$ besitzen.

(b) Wählen Sie die Lösung aus dem Teil (a) aus, welche zu dem Anfangswert

$$u(0,x) = \sin(2x) + \cos(4x)$$

passt.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten**: Wir machen den Separationsansatz

$$u(t,x) = v(t)w(x).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= v'(t)w(x),\\ \partial_x u(t,x) &= v(t)w'(x),\\ \partial_{xx} u(t,x) &= v(t)w''(x).\end{aligned}$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen: Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = v'(t)w(x) - v(t)w''(x)\\ \Leftrightarrow\ & v(t)w''(x) = v'(t)w(x)\\ \Leftrightarrow\ & \frac{w''(x)}{w(x)} = \frac{v'(t)}{v(t)}.\end{aligned}$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle t, x gelten muss, müssen die beiden Quotienten

$$\frac{w''(x)}{w(x)} \text{ und } \frac{v'(t)}{v(t)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda^2 = \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} v'(t) &= \lambda^2 v(t),\\ w''(x) &= \lambda^2 w(x).\end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu v: Die Lösung zu v lautet nun

$$v(t) = C\mathrm{e}^{\lambda^2 t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten C.
Lösung zu w: Umgestellt bekommen wir

$$w''(x) - \lambda^2 w(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Als Lösung folgt nun

$$w(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda x}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst ($\lambda = 0$)

$$w(x) = C_1 + C_2 x$$

für jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten C_1, C_2.
Schritt 4. Randdaten beachten: Ist nun $\lambda = 0$, so erhalten wir für u:

$$u^{(0)}(t,x) = v^{(0)}(t)w^{(0)}(x) = C^{(0)}\left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)}x\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$, bzw. für $\lambda \neq 0$

$$u^{(\lambda)}(t,x) = v^{(\lambda)}(t)w^{(\lambda)}(x) = C^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C^{(\lambda)} = 1$ für alle möglichen λ. Wir möchten nun, dass die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u^{(\lambda)}(t,0) &= u^{(\lambda)}(t,\pi), \\ \partial_x u^{(\lambda)}(t,0) &= \partial_x u^{(\lambda)}(t,\pi) \end{aligned}$$

für alle zulässigen λ erfüllt sind, dafür berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_x u^{(0)}(t,x) &= C_2^{(0)}, \\ \partial_x u^{(\lambda)}(t,x) &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(-C_1^{(\lambda)}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\lambda\left(-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}\right). \end{aligned}$$

Damit gilt automatisch

$$\partial_x u^{(0)}(t,0) = C_2^{(0)} = \partial_x u^{(0)}(t,\pi),$$

und aus

$$C_1^{(0)} = u^{(0)}(t,0) = u^{(0)}(t,\pi) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)}\pi \;\Leftrightarrow\; C_2^{(0)} = 0,$$

d.h. für $u^{(0)}$:

$$u^{(0)}(t,x) = C_1^{(0)}.$$

Weiter gilt im anderen Fall $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)}\right) = u^{(\lambda)}(t,0) = u^{(\lambda)}(t,\pi) &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda\pi} + C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda\pi}\right) \\ \Leftrightarrow\; C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} &= C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda\pi} + C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda\pi}, \\ \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\lambda\left(-C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)}\right) = \partial_x u^{(\lambda)}(t,0) = \partial_x u^{(\lambda)}(t,\pi) &= \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\lambda\left(-C_1^{(\lambda)}\mathrm{e}^{-\lambda\pi} + C_2^{(\lambda\pi)}\mathrm{e}^{\lambda}\right). \\ \Rightarrow\; 2C_2^{(\lambda)} &= 2C_2^{(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda\pi} \\ \Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{\lambda\pi} &= 1 \\ \Leftrightarrow\; \lambda &= 2\mathrm{i}k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung u_N aufstellen: Sei $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = \mathrm{i}k\pi$ für $k \in \mathbb{N}$ und $C_j^{(\lambda_k)} =: C_j^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2$. Dann ist die (komplexwertige) Lösung u_N von der Form

$$u_N(t,x) = u^{(0)}(t,x) + \sum_{k=1}^{N} u^{(k)}(t,x)$$

$$= C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-4k^2 t} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} + C_2^{(k)} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} \right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1^{(0)}, C_2^{(0)} \in \mathbb{C}$ und $C_1^{(k)}, C_2^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$. Damit ist die (reellwertige) Lösung u_N von der Form

$$u_N(t,x) = \widetilde{C}_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-4k^2 t} \left(\widetilde{C}_1^{(k)} \sin(2kx) + \widetilde{C}_2^{(k)} \cos(2kx) \right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $\widetilde{C}_1^{(0)}, \widetilde{C}_2^{(0)} \in \mathbb{C}$ und $\widetilde{C}_1^{(k)}, \widetilde{C}_2^{(k)} \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$. □

(b) **Schritt 6. Spezielle Lösung u aufstellen**: Die Anfangsbedingung liefert nun

$$\sin(2x) + \cos(4x) = u(0,x) = C_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} + C_2^{(k)} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} \right),$$

wähle $N = 2$, $C_1^{(1)} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}, C_2^{(1)} = \frac{1}{2\mathrm{i}}, C_1^{(1)} = \frac{1}{2} = C_2^{(2)}$ und $C_1^{(0)} = 0$, so erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{\mathrm{e}^{4t}}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \right) + \frac{\mathrm{e}^{16t}}{2} \left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} \right) \\ &= \mathrm{e}^{4t} \sin(2x) + \mathrm{e}^{16t} \cos(4x) \end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (Separationsansatz bei anderen PDEs)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$x\partial_{xx}u(t,x) + \partial_x u(t,x) = \frac{1}{x}\partial_t u(t,x) \text{ für } t \in \mathbb{R}, x > 0,$$
$$u(t,1) = 0 = u(t,\mathrm{e}).$$

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes alle Lösungen der Form $u(t,x) = v(t)w(x)$.

Lösung von Aufgabe 2

Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten: Wir machen den Separationsansatz

$$u(t,x) = v(t)w(x).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= v'(t)w(x),\\
\partial_x u(t,x) &= v(t)w'(x),\\
\partial_{xx} u(t,x) &= v(t)w''(x).
\end{aligned}$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen: Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
xv(t)w''(x) + v(t)w'(x) &= x\partial_{xx}u(t,x) + \partial_x u(t,x) = \frac{1}{x}\partial_t u(t,x) = \frac{1}{x}v'(t)w(x)\\
\Leftrightarrow \quad \frac{x^2w''(x) + xw'(x)}{w(x)} &= \frac{v'(t)}{v(t)}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle t, x gelten muss, müssen die beiden Seiten

$$\frac{x^2w''(x) + xw'(x)}{w(x)} \text{ und } \frac{v'(t)}{v(t)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\frac{x^2w''(x) + xw'(x)}{w(x)} = \lambda^2 = \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \lambda^2 v(t),\\
x^2w''(x) + xw'(x) &= \lambda^2 w(x) \;\Leftrightarrow\; x^2w''(x) + xw'(x) - \lambda^2 w(x) = 0.
\end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu v: Die Lösung zu v lautet nun

$$v(t) = C\mathrm{e}^{\lambda^2 t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten C.
Lösung zu w: Es handelt sich um eine homogene Euler-Differentialgleichung.
Substitution: Wir setzen $x = \mathrm{e}^y$ und $z(y) = w(\mathrm{e}^y)$ mit Ableitungen

$$\begin{aligned}
z'(y) &= \mathrm{e}^y w'(\mathrm{e}^y),\\
z''(y) &= \mathrm{e}^y w'(\mathrm{e}^y) + \mathrm{e}^{2y}w''(\mathrm{e}^y) = z'(y) + \mathrm{e}^{2y}w''(\mathrm{e}^y)\\
\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{2y}w''(\mathrm{e}^y) &= z''(y) - z'(y).
\end{aligned}$$

Ansatz eingesetzt: Eingesetzt erhalten wir so

$$\begin{aligned}
0 &= x^2w''(x) + xw'(x) - \lambda^2 w(x) = \mathrm{e}^{2y}w''(\mathrm{e}^y) + \mathrm{e}^y w'(\mathrm{e}^y) - \lambda^2 w(\mathrm{e}^y)\\
&= (z''(y) - z'(y)) + z'(y) - \lambda^2 z(y)\\
&= z''(y) - \lambda^2 z(y).
\end{aligned}$$

Nun haben wir für z eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Lösung von z: Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Als Lösung folgt nun

$$z^{(\lambda)}(y) = C_1 \mathrm{e}^{-\lambda y} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda y}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst ($\lambda = 0$)

$$z^{(0)}(y) = C_1 + C_2 y$$

für jeweils alle $y \in \mathbb{R}$ mit Konstanten C_1, C_2.
Rücksubstitution: Mit $y = \log(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} w^{(0)}(x) &= z^{(0)}(\log(x)) = C_1 + C_2 \log(x), \\ w^{(\lambda)}(x) &= z^{(\lambda)}(\log(x)) = C_1 \mathrm{e}^{-\lambda \log(x)} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda \log(x)} \\ &= C_1 x^{-\lambda} + C_2 x^{\lambda} \end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$.
Schritt 4. Randdaten beachten: Ist nun $\lambda = 0$, so erhalten wir für u:

$$u^{(0)}(t,x) = v^{(0)}(t) w^{(0)}(x) = C^{(0)} \left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)} \log(x) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x > 0$, bzw. für $\lambda \neq 0$

$$u^{(\lambda)}(t,x) = v^{(\lambda)}(t) w^{(\lambda)}(x) = C^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \left(C_1 x^{-\lambda} + C_2 x^{\lambda} \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x > 0$. O.B.d.A. wählen wir $C^{(\lambda)} = 1$ für alle möglichen λ. Wir möchten nun, dass die Randbedingung

$$u^{(\lambda)}(t,1) = 0 = u^{(\lambda)}(t,\mathrm{e})$$

für alle zulässigen λ erfüllt ist. Damit gilt automatisch

$$C_1^{(0)} = u^{(0)}(t,1) = 0 = u^{(\lambda)}(t,\mathrm{e}) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)},$$

also $C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = 0$, d.h. für $u^{(0)}$:

$$u^{(0)}(t,x) = 0.$$

Weiter gilt im anderen Fall $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 0 = u^{(\lambda)}(t,1) = \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \left(C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} \right) \\ \Leftrightarrow\ & C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & C_1^{(\lambda)} = -C_2^{(\lambda)}, \\ \Rightarrow\ & 0 = u^{(\lambda)}(t,\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \left(C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} \right) \\ & = \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \left(-C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda} \right) \\ & = \mathrm{e}^{\lambda^2 t} C_2^{(\lambda)} \left(-\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda} \right) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = -\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{2\lambda} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = k\pi \mathrm{i} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Schritt 5. Allgemeine Lösung u_N aufstellen: Sei $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = \mathrm{i}k\pi$ für $k \in \mathbb{N}$ und $C_j^{(\lambda_k)} =: C_j^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $j = 1,2$. Dann ist die (komplexwertige) Lösung u_N von der Form

$$\begin{aligned} u_N(t,x) &= u^{(0)}(t,x) + \sum_{k=1}^{N} u^{(k)}(t,x) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \left(C_1^{(k)} x^{-k\pi\mathrm{i}} + C_2^{(k)} x^{k\pi\mathrm{i}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-k\pi\mathrm{i}\log(x)} + C_2^{(k)} \mathrm{e}^{k\pi\mathrm{i}\log(x)} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-k\pi \mathrm{i} \log(x)} - C_1^{(k)} \mathrm{e}^{k\pi \mathrm{i} \log(x)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} C_1^{(k)} \left(\mathrm{e}^{-k\pi \mathrm{i} \log(x)} - \mathrm{e}^{k\pi \mathrm{i} \log(x)} \right)
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ mit Konstanten $C_1^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$. Damit ist die (reellwertige) Lösung u_N von der Form

$$
u_N(t, x) = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{C}_1^{(k)} \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \sin\left(k\pi \log(x)\right)
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ mit Konstanten $\widetilde{C}_1^{(k)} \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$. $\square$