Aufgabe 1 Wir wissen schon folgendes: exp ist positiv und stetig, auf $[0, \infty)$ ist exp streng monoton wachsend, $\exp(x) = e^x \to \infty$ für $x \to \infty$, $e^0 = 1$ und es gilt $e^{x+y} = e^x e^y$.

Wir schließen daraus, dass exp auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist:
Es gilt allgemein für $x \in \mathbb{R}$: $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x}$, also $e^{-x} = 1/e^x$. Damit gilt für $x < y \leq 0$ (also $-x > -y \geq 0$):

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{e^{-y}} = e^y.$$

Also ist exp streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0]$, zusammen also auf ganz $\mathbb{R}$. Insbesondere ist exp injektiv.

Nun zeigen wir dass $e^x \to 0$ für $x \to -\infty$:
Da exp nur positive Werte annimmt und streng monoton wächst, reicht es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $e^x \leq \varepsilon$.
Sei also $\varepsilon > 0$. Dazu existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $e^y > \frac{1}{\varepsilon}$, folglich erfüllt $x := -y$

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{e^y} < \varepsilon.$$

Wir zeigen damit die Surjektivität von $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$: Sei $z \in \mathbb{R}^+$, also $z > 0$. Wir wissen, dass es $x, y \in \mathbb{R}$ gibt mit $e^x < z < e^y$, nach dem Zwischenwertsatz also auch ein $x_0 \in (x, y)$ mit $e^{x_0} = x$.

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv, was zu zeigen war.

Aufgabe 3 Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Für $x > 1$ und für $x < 1$ ist f offenbar stetig; damit f auch an der Stelle $x = 1$ stetig ist, muss gelten:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1), \quad \text{also} \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1+} f(x)\,.$$

Nun haben wir

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = 2 + a \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = 2 - 1 = 1\,;$$

somit muss $a = -1$ gelten.

Aufgabe 4 Diese Funktion ist nur in $x = \frac{1}{2}$ stetig.

Ist nämlich (x_n) eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, so gilt $f(x_n) = x_n$ oder $f(x_n) = 1 - x_n$ und wegen $x_n \to \frac{1}{2}$ und $1 - x_n \to 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ folgt $f(x_n) \to \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$ für $n \to \infty$.

Ist dagegen $x_0 \neq \frac{1}{2}$, so unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Nach Aufgabe 2 vom 8. Übungsblatt existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Dann gilt $f(x_n) = x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \neq 1 - x_0 = f(x_0)$, d. h. es gilt nicht $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. (Man kann sich sogar überlegen, dass dieser Grenzwert nicht existiert.)
2. Fall: $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann ist $x_n := x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und damit gilt $f(x_n) = 1 - x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 - x_0 \neq x_0$, d. h. auch hier gilt nicht $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Aufgabe 5 **a)** Wir definieren die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Wegen $R(g) \subset [a,b]$ ist $h(a) = a - g(a) \leq a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geq b - b = 0$. Gilt $h(a) = 0$ oder $h(b) = 0$, so haben wir $g(a) = a$ bzw. $g(b) = b$. Sonst ist $h(a) < 0$ und $h(b) > 0$; da h stetig ist, gibt es also ein $x_0 \in (a,b)$ mit $h(x_0) = 0$, d. h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0,2]$ ist f offensichtlich stetig. Zudem ist für $x \geq 0$ offenbar $f(x) \geq 0$ und $f(x) \leq 1$. Für die stetige Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ gilt gemäß **a)** daher: Es gibt mindestens ein $x_0 \in [0,2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f.)

c) Man beachte: x_0 ist jetzt irgendeine Zahl aus dem Intervall $[0,2]$, es wird also *nicht* $f(x_0) = x_0$ vorausgesetzt. (Sonst wäre die definierte Folge konstant und damit selbstverständlich konvergent.)

Probiert man ein paar Anfangswerte x_0 aus, so stellt man fest, dass sich stets eine monotone Folge ergibt. Dass dies so sein muss, kann man wie folgt einsehen: Wegen

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$$

ist die Funktion f monoton wachsend. Dies bedeutet aber: Ist x_0 so gewählt, dass $x_0 \leq f(x_0) = x_1$, so folgt induktiv, dass (x_n) monoton wächst ($x_{n-1} \leq x_n$ impliziert $f(x_{n-1}) \leq f(x_n)$, also $x_n \leq x_{n+1}$); ist dagegen $x_0 \geq x_1$, so fällt (x_n) monoton.

Wegen $0 \leq x_n \leq 2$ ist (x_n) eine beschränkte, monotone Folge und damit konvergent.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $x_{n+1} = f(x_n)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert ξ der Folge (x_n) die Gleichung $\xi = f(\xi)$, d. h. ξ ist Fixpunkt von f. Rechnen wir ξ aus: Es gilt $\xi(\xi+3) = \xi + 2$, also $\xi^2 + 2\xi - 2 = 0$. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen $\xi_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2}$. Wegen $\xi \geq 0$ ist also $\xi = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 6 **a)** O.B.d.A. sei $a_{13} > 0$. (Sonst geht man analog vor.) Da 13 eine ungerade Zahl ist, gilt dann $p(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ und $p(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$. Für ein hinreichend großes $M > 0$ ist daher $p(M) > 13$ und $p(-M) < 13$. Da p stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen: Es gibt mindestens ein $x_0 \in (-M, M)$ mit $p(x_0) = 13$.

b) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Behauptung trivial. Sonst wählen wir ein x_1 mit $f(x_1) \neq 0$ und setzen $\epsilon := |f(x_1)|$. Nach Voraussetzung gibt es ein $M > 0$ mit

$$|f(x)| < \epsilon \quad \text{für } x < -M \text{ und für } x > M.$$

Nach Definition von ϵ ist also insbesondere $x_1 \in [-M, M]$.

Die stetige Funktion $g : [-M,M] \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) := |f(x)|$ nimmt auf dem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[-M,M]$ ihr Maximum an, d. h. es gibt ein $x_0 \in [-M,M]$ mit $g(x) \leq g(x_0)$ für alle $x \in [-M,M]$.

Für $x \in [-M,M]$ gilt somit $|f(x)| = g(x) \leq g(x_0) = |f(x_0)|$; auch für $x \notin [-M,M]$ ist

$$|f(x)| < \epsilon = |f(x_1)| \leq \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| = |f(x_0)|\,.$$

c) Die stetige Funktion f nimmt auf $[a,b]$ ihr Minimum an, d. h. es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \geq f(x_0) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann folgt

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty\,.$$

Die Funktion $1/f$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke ist 0.

Aufgabe 7 **a)** Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind.

Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Dort gilt

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1) \right| = \left| \frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx} \right| \\ &= \left| \frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx} \right| = \left| \frac{-1}{1 + nx} \right| \le \frac{1}{1 + na}\,. \end{aligned}$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{1+na} \le \epsilon$ für alle $n \ge N$; für $n \ge N$ ist dann also $\sup|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist die Konvergenz wiederum *nicht* gleichmäßig, denn es ist $\sup\{\, |f_n(x) - f(x)| : x \in (0, \infty) \,\} = 1$.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1 - x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Hier gilt $|1 - x| \le \frac{1}{2}$, also

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1 - x)^n| = |1 - x|^n \le 2^{-n}\,,$$

und wie bei **a)** bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

Bemerkung: Auf dem Intervall $(0, 1]$ ist die Konvergenz jedoch *nicht* gleichmäßig, denn $\sup\{\, |f_n(x) - f(x)| : x \in (0, 1] \,\} = 1$.

c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Dass $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n(\tfrac{1}{n+1}) = n \cdot \tfrac{1}{n+1}(1 - \tfrac{1}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n+1}{n})^{-n} = \tfrac{n}{n+1}(1 + \tfrac{1}{n})^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}\,.$$

Dies bedeutet aber $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \ge \frac{1}{2}e^{-1}$ für alle hinreichend großen n und schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

2.) Wir setzen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Damit gilt: f_1, f_2 sind stetig, $f_2(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Damit ist $f(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{x}$ stetig (Vorlesung).

Auch $w(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ ist stetig:

Sei $x \geq 0$ und $\varepsilon > 0$.

z.z. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \geq 0$ mit $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

1. Fall $x = 0$: $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{0} - \sqrt{y}| = \sqrt{y} \overset{!}{<} \varepsilon$

$\Leftrightarrow y < \varepsilon^2 \overset{x=0}{\Leftrightarrow} |x-y| < \varepsilon^2$

Für $\delta = \varepsilon^2$ gilt für alle $y \geq 0$ mit $|x-y| < \varepsilon^2$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

---

2. Fall $x > 0$: $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \overset{!}{<} \varepsilon$

$\Leftrightarrow |(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})| < \varepsilon(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$\Leftrightarrow |x - y| < \underbrace{\varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon\sqrt{y}}_{\geq \varepsilon\sqrt{x}}$

Für $\delta = \varepsilon\sqrt{x} > 0$ gilt: $y \geq 0$ und $|x-y| < \delta = \varepsilon\sqrt{x} \leq \varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon\sqrt{y}$,

also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

8.) Nötig $y \neq 0$

Dafür reicht $|y - y_0| < |y_0|$ (klar) (α)

(Beweis: $|y_0| = |y_0 - y + y| \leq |y_0 - y| + |y|$

$\rightarrow |y| \geq |y_0| - |y - y_0| > 0$)

Nun müssen wir $\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right|$ abschätzen:

Trick: $$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| = \Big|\frac{x}{y} \overbrace{- \frac{x}{y_0} + \frac{x}{y_0}}^{=0} - \frac{x_0}{y_0}\Big|$$

$$\leq \left|\frac{x}{y} - \frac{x}{y_0}\right| + \left|\frac{x}{y_0} - \frac{x_0}{y_0}\right|$$

$$= \underbrace{|x| \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right|}_{\overset{!}{<} \frac{\varepsilon}{2} \ \mathrm{II}} + \underbrace{\frac{1}{|y_0|} |x - x_0|}_{\overset{!}{<} \frac{\varepsilon}{2} \ (\mathrm{I})} \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$(\mathrm{I}) \leftrightarrow |x - x_0| < \underbrace{|y_0| \cdot \varepsilon}_{\text{das ist das zweite?}}$$

$$(\mathrm{II}) \ |x| \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \leftarrow \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2 \max\{0, |x|\}}}_{=: T}$$

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y_0 - y}{y y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y y_0|}$$ setzen wir $|y_0 - y| < \left|\frac{y_0}{2}\right|$ (β)

dann gilt $|y| > \left|\frac{y_0}{2}\right|$

$$\leq \frac{|y_0 - y|}{|y_0| \cdot \left|\frac{y_0}{2}\right|} = \frac{|y_0 - y|}{\frac{1}{2}|y_0|^2} \overset{!}{<} T$$

$$\leftarrow |y_0 - y| < \frac{1}{2} y_0^2 T = \frac{\varepsilon |y_0|^2}{4 \max\{0, |x|\}} \qquad (\gamma)$$

(α) (β) und (γ) sind erfüllt für $|y_0 - y| < \underbrace{\min\left\{|y_0|, \left|\frac{y_0}{2}\right|, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{4 \max\{0, |x|\}}\right\}}_{\text{erstes?}}$