Aufgabe 1 **a)** Dies wurde zwar in der Vorlesung schon berechnet. Aber Widerholung dieser schönen Rechnungen schadet d.Ü.E. nichts:

$$tan'(x) = \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Wir können dies auch anders umformen:

$$tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)^2 = 1 + \tan^2 x.$$

Sei $y = \tan x$. Dann gilt $x = \operatorname{Arctan} y$ und nach der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\tan' x = \frac{1}{(\tan^{-1})'(y)} = \frac{1}{\operatorname{Arctan}' y}.$$

Damit erhalten wir

$$\operatorname{Arctan}' y = \frac{1}{tan' x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

b) Für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2} \cdot \big(-x^{-2}\big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung auf ganz $(0, \infty)$ verschwindet, ist die Funktion dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt $f(x) = f(1) = 2 \operatorname{Arctan}(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 4 **a)** Wir betrachten die Funktion f, die durch $f(x) = \cos x$ gegeben ist. Zu jedem $x > 0$ existiert dann laut Mittelwertsatz ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \quad \text{also} \quad -\sin \xi = \frac{\cos x - 1}{x}\,.$$

Insbesondere gibt es zu $x_n = \frac{1}{n}$ ein solches ξ_n. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1 - \cos \tfrac{1}{n}\big) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin \xi_n \xrightarrow{n \to \infty} \sin 0 = 0\,.$$

b) Hier nehmen wir $f(y) = \cos \sqrt{y}$. Zu jedem x existiert dann ein $\xi \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi), \quad \text{also} \quad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}\,.$$

Also ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\,\big| \le \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

und da für $x \to \infty$ auch $\xi \to \infty$ gilt, ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

c) Hier sei $f(x) := x^\beta$ und $g(x) := x^\delta$. Zu $x \neq a$ gibt es dann ξ zwischen a und x mit

$$\frac{x^\delta - a^\delta}{x^\beta - a^\beta} = \frac{g(x) - g(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{\delta \xi^{\delta - 1}}{\beta \xi^{\beta - 1}} = \frac{\delta \xi^{\delta - \beta}}{\beta}\,.$$

Für $x \to a$ gilt auch $\xi \to a$ und der Quotient strebt gegen $(\delta/\beta) a^{\delta - \beta}$.

Aufgabe 6 **a)** Wir teilen das Intervall auf:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|x-1|\,dx &= \int_{-2}^{1}|x-1|\,dx+\int_{1}^{2}|x-1|\,dx=\int_{-2}^{1}1-x\,dx+\int_{1}^{2}x-1\,dx\\ &= \big(x-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{1}\big)+\big(\frac{1}{2}x^2-x\Big|_{1}^{2}\big)\\ &= \big(1-\frac{1}{2}\big)-(-2-2)+(2-2)-\big(\frac{1}{2}-1\big)=5.\end{aligned}$$

b) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{x=0}^{\pi/2}=\tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\sin^2(0)\big)=\tfrac{1}{2}(1-0)=\tfrac{1}{2}\,.$$

c) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1\frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx\\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^{1}=-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,)=\tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)\end{aligned}$$

d) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $\phi(t)=\sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $\phi'(t)\,dt=(2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x=\phi(1)=1$ und $t=4$ entspricht $x=\phi(4)=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4\frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\\ &= \int_1^2\frac{2}{1+x}\,dx=2\ln|1+x|\,\Big|_{x=1}^{2}=2\big(\ln(3)-\ln(2)\big)=2\ln\tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

e) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir Produktintegration für $f(x)=\ln x$ und $g'(x)=x$. Mit $f'(x)=x^{-1}$ und $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\big|_{x=1}^{e}-\int_1^e f'(x)g(x)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\big|_{x=1}^{e}-\int_1^e\tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx=\tfrac{1}{2}(e^2\ln e-\ln 1)-\int_1^e\tfrac{1}{2}x\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^2-\big(\tfrac{1}{4}x^2\big|_{x=1}^{e}\big)=\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{4}(e^2-1)=\tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

f) Betrachten wir zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin x\,dx &= -\cos x\big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi}=-\cos(k\pi)+\cos((k-1)\pi)\\ &= -(-1)^k+(-1)^{k-1}=2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi,k\pi]$ entweder ≥ 0 oder ≤ 0. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx=\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin x\,dx\right|=2\,.$$

Aufgabe 2 Für $t < 0$ trifft die Aussage nicht zu, denn in diesem Falle gilt $x^t \to \infty$ für $x \to 0$. Für $t = 0$ ist sie hingegen offenbar richtig.

Wir müssen im folgenden also nur noch den Fall $t > 0$ betrachten: Logarithmieren wir die Abschätzung $e^x > x^t$, so ergibt sich

$$x > \ln(x^t) = t \ln x, \qquad \text{also} \qquad t^{-1} > \frac{\ln x}{x}\,.$$

Setzen wir $g(x) := (\ln x)/x$, so lässt sich unsere Frage wie folgt umformulieren: Für welche $t > 0$ nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an?

Für $x \in (0, 1]$ gilt $g(x) \leq 0$. Aus $g'(x) = (\frac{1}{x} \cdot x - \ln x)/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$ können wir folgendes schließen: Für $x \in (1, e)$ ist $g(x) > 0$, also g monoton steigend, für $x \in (e, \infty)$ ist $g(x) < 0$, also g monoton fallend. Die Funktion erreicht ihr Maximum somit an der Stelle $x = e$ mit $g(e) = e^{-1}$. Also: Genau dann nimmt g nur Werte $< t^{-1}$ an, wenn $e^{-1} < t^{-1}$, also $e > t$.

Die Antwort auf die Frage lautet: Die Aussage gilt genau dann, wenn $0 \leq t < e$.

Aufgabe 3 **a)** Die Funktion ist auf dem gesamten Intervall differenzierbar. In jedem Maximum oder Minimum im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung. D.h.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0.$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen also diese drei Stellen untersuchen (die auch alle im Intervall liegen!), außerdem noch die Ränder des Intervalls: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum ist folglich 47, das Minimum ist -2.

b) Die Funktion ist, außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte, den Punkt 3 und alle Punkte im Innern des Intervalls untersuchen, an denen die Ableitung verschwindet.
Auf $[0, 3]$ gilt

$$f(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25, \text{ also } f'(x) = 2x - 16.$$

$f'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8$, das ist aber nicht im Intervall $[0, 3]$. Also hat f' in $[0, 3]$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$f(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1, \text{ also } f'(x) = 2x - 8.$$

$f'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen. $f(0) = 25$, $f(3) = -14$, $f(4) = -15$, $f(10) = 21$. Also ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von f.

Aufgabe 5 Oberfläche A und Volumen V einer zylindrischen Konservendose mit Radius r und Höhe h berechnen sich wir folgt:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{und} \quad V = \pi r^2 h\,.$$

Bei vorgegebenem Volumen V gilt somit $h = V/(\pi r^2)$ und für die Oberfläche ergibt sich $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2V/r$.

Die Oberfläche soll möglichst klein werden. Wegen $A(r) \to \infty$ für $r \to 0$ und für $r \to \infty$ folgt aus der Stetigkeit von $A(r)$, dass A auf $(0, \infty)$ ein Minimum hat. (Genaue Begründung: Es gibt ϵ und M mit $\epsilon < 1 < M$ und $A(r) > A(1)$ für $r < \epsilon$ und für $r > M$. Das Minimum, das A als stetige Funktion auf $[\epsilon, M]$ besitzt, ist also auch das Minimum auf $(0, \infty)$.) Dort muss die Ableitung verschwinden:

$$A'(r) = 0 \iff 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \iff r^3 = \frac{V}{2\pi} \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,.$$

Für die Höhe ergibt sich dann

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi(\frac{V}{2\pi})^{2/3}} = \frac{V^{1/3} \cdot 2^{2/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r\,.$$

Aufgabe 7 Wir setzen $f(x) := \int_0^x \sin(e^t)\, dt$ und $g(x) := \sin x$.
Damit gilt $F(x) = f(g(x))$ (also $F = f \circ g$), weshalb aus der Kettenregel folgt $F'(x) = g'(x) f'(g(x))$.
Wir wissen: $g'(x) = \cos x$ und nach dem Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung gilt $f'(x) = \sin(e^x)$. Zusammen haben wir also

$$F'(x) = g'(x) f'(g(x)) = \cos x \sin(e^{\sin x}).$$

Aufgabe 8 Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\log(x)\sqrt{x}}$.
Wir setzten $g(x) := \log(x)\sqrt{x}$ damit gilt $f(x) = exp(g(x))$, also

$$f'(x) = g'(x) exp'(g(x)) = g'(x) exp(g(x)) = g'(x) f(x).$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \log'(x)\sqrt{x} + \log(x)\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{x}\sqrt{x} + \log(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(2 + \log(x))}{2x},$$

Also

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(2 + \log(x))}{2x} f(x).$$