14. Kapitel: Grundlagen der Differential- und Integralrechnung

14.1 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion. Die Punkte $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ definieren eine Zerlegung Z von $[a,b]$, wenn $a =: x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n := b$ ist. Es sei $\|Z\| = \max\{x_k - x_{k-1},\ k = 1,2,\dots,n\}$. Mit den Zahlen

$m_k = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $M_k = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$,

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,2,\dots,n)$ werden gebildet:

$$\left.\begin{aligned} \omega(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \\ \sigma(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ \Omega(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}\right\} \text{Riemannsche} \left\{\begin{aligned} &\text{Unter-} \\ &\text{Zwischen-} \\ &\text{Obersumme} \end{aligned}\right.$$

von f zur Zerlegung Z.

Es gilt: $\omega(f,Z) \le \sigma(f,Z) \le \Omega(f,Z)$.

<u>Def</u>: f ist über $[a,b]$ <u>integrierbar</u> ($\int_a^b f(x)\,dx$ existiert), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ so gibt, dass $\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) < \varepsilon$ gilt.

Es ist $\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{\omega(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$
$= \inf\{\Omega(f,Z) \mid \quad " \quad \}$.

Für die Funktion $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

hat man $\omega(f,Z) = 0$, $\Omega(f,Z) = 1$ für jede Zerlegung Z.

$\int_0^1 f(x)\,dx$ existiert nicht im oben definierten Sinn.

Satz 1: 1) Ist f auf $[a,b]$ stetig, so ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

2) Ist f auf $[a,b]$ monoton, so ist f auf $[a,b]$ integrierbar

Bemerkungen, Ergänzungen.

1) Es sei f auf $[a,b]$ definiert und stetig außer eventuell in den endlich vielen Punkten a_j: $a < a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < b$. Die Grenzwerte (S. 34 unten)

$$\lim_{x \to a_j+} f(x) =: f(a_j+), \quad \lim_{x \to a_j-} f(x) =: f(a_j-) \quad (j = 1, \dots, N-1)$$

mögen existieren. f heißt dann stückweise stetig auf $[a,b]$. (Die Unstetigkeiten a_j sind Sprungunstetigkeiten. Die Sprünge $f(a_j+) - f(a_j-)$ sind endlich)

Def:
$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{j=1}^{N} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)\,dx.$$

(Hier sind $a_0 := a$ und $a_N := b$ gesetzt)

2) Sind f_1, f_2 stetig auf $[a,b]$ und gilt $f_1(x) \le f_2(x)$, $a \le x \le b$, so ist $\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$ der Flächeninhalt $I(G)$ der Menge $G = \{(x,y) \mid f_1(x) \le y \le f_2(x), a \le x \le b\}$.

3) Ist f integrabel, so kann $\int_a^b f(x)\,dx$ ~~etwa~~ so berechnet werden: Wähle eine Folge (Z_n) von Zerlegungen $Z_n = \{x_0^{(n)} = a, x_1^{(n)}, \dots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)} = b\}$ $(n \in \mathbb{N})$ von $[a,b]$ mit $\lim_{n \to \infty} \|Z_n\| = 0$ und wähle Zwischenpunkte $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Dann

gilt: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \qquad \text{(RZ)}$$

(Dies gilt somit für komplexwertige Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, die beschränkt sind)

Hierzu: i) Mit Z_n: $x_k^{(n)} = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k=0,1,\dots,n$

$\xi_k^{(n)} = x_k^{(n)}$ erhält man wegen

$\|Z_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0$ $(n\to\infty)$ aus (RZ) den

Satz 2: Ist f über $[a,b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right).$$

ii) Es sei $0<a<b$. Setze $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$. Definiere

Z_n: $x_k^{(n)} = aq^k$, $k=0,1,\dots,n$

$\xi_k^{(n)} = x_{k-1}^{(n)}$, $k=1,\dots,n$. Wegen

$\|Z_n\| = aq^{n-1}(q-1) \to 0$ $(n\to\infty)$ gibt (RZ) den

Satz 3: Ist f über $[a,b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(aq^{k-1})\,aq^{k-1}(q-1).$$

Beispiele: zu Satz 2: $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ $(c\in\mathbb{C}$ konst$)$

$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$, $\int_a^b e^{cx}dx = \frac{1}{c}(e^{cb}-e^{ca})$ $(c$ konst $\in\mathbb{C})$

zu Satz 3: Ü: Berechne mit Satz 3: $\int_a^b x^p dx$, $p\in\mathbb{N}$.

Versuche, das auf $p\in\mathbb{Q}$ zu verallgemeinern.

4) f sei integrabel über $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

5) f, g seien integrabel, $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$ (konst). Es gilt

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \rho g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \rho \int_a^b g(x)\,dx$$

Beispiel: Mit dem 3. Beispiel zu Satz 2 ($c = i, -i$), hiermit und mit $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ erhält man

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \quad \int_a^b \sin x\,dx = -\cos b + \cos a$$

6) f sei über $[a,b]$ integrabel. Für $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx.$$

14.2 Es seien $f, g \in C^0([a,b])$. Dann gelten:

1) Aus $f(x) \le g(x)$, $a \le x \le b$, folgt: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

3) $\int_a^b |f(x) g(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)|\,dx$ (vgl. §.4, A6 oder hier S. 39)

14.3 Satz 4 (MWSIR: Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Es seien $f, g \in C^0([a,b])$ und es gelte $f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$. Dann gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$, so dass

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = g(\xi) \int_a^b f(x)\,dx$$ erfüllt ist.

14.4 Die Landau-Symbole "o", "O":

f, g seien auf $\{x \mid 0 < |x - x_0| < r\}$ definierte Funktionen, $g(x) \neq 0$ für $0 < |x - x_0| < r$.

Def: 1) $\left(f(x) := o(g(x)), x \to x_0 \right) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

2) $\left(f(x) := O(g(x)), x \to x_0 \right) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)}{g(x)}$ ist beschränkt für $x \to x_0$

Beispiele: 1. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt: $x^m = o(e^x), x \to \infty$,

2. $x = o(1)$, $x \to 0$,

$f(x) - f(x_0) = o(1), x \to x_0$ bedeutet, dass f in x_0 stetig ist,

3. $\exp(x) = 1 + x + o(x)$, $x \to 0$,

4. $\sin \frac{1}{x} = O(1)$, $x \to 0$,

5. $\exp(x) - 1 = O(x)$, $x \to 0$.

14.5 $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $x_0 \in I$. $f : I \to \mathbb{C}$ heißt in x_0 diff'bar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0 + h) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Dieser Grenzwert wird durch $f'(x_0)$ oder $(Df)(x_0)$ bezeichnet. Er heißt die erste Ableitung von f in x_0.

f heißt auf I diff'bar, wenn $f'(x)$ für jedes $x \in I$ existiert. Die Funktion $f' : x \to f'(x)$ $(I \to \mathbb{C})$ heißt die erste Ableitung von f auf I. Es sei $n \in \mathbb{N}$:

f heißt auf I <u>n-mal diff'bar</u>, wenn f auf I $(n-1)$ mal diff'bar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ auf I diff'bar ist. Die n-te Ableitung wird durch $f^{(n)}$ bezeichnet. Es ist $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

Ist f in x_0 diff'bar, so wird durch

$$t_{f,x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

die Gleichung der der Tangente an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ gegeben.

<u>Beispiele</u>: 1) $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $f(x) = x^n$

$$f^{(\ell)}(x) = \ell! \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} \rightarrow f^{(n)}(x) = n!, \; f^{(\ell)}(x) = 0 \text{ für } \ell > n.$$

2) $f(x) = e^{cx}$, $f'(x) = ce^{cx}$

<u>Satz 5</u>: a) Ist f in $x_0 \in I$ diff'bar, so gibt es eine in x_0 stetige Funktion $r: I \rightarrow \mathbb{C}$ mit $r(x_0) = 0$ und

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad , x \in I$$

b) Gibt es eine in x_0 stetige Funktion $r: I \rightarrow \mathbb{C}$ mit $r(x_0) = 0$ und eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad , x \in I$$

gilt, so ist f in x_0 diff'bar und es ist $f'(x_0) = a$.

<u>Beispiele</u>:

1) $f(x) = e^{cx}$:

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{ce^{cx_0}}_{= f'(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{e^{cx_0}\Big(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k (x - x_0)^{k-1}\Big)}_{= r(x)}(x - x_0)$$

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

$$x_0 > 0: \quad f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}_{= f'(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right)}_{= r(x)}(x - x_0)$$

14.6 Ableitungsregeln

Satz 6: $f, g : I \to \mathbb{C}$ seien in $x_0 \in I$ diff'bare Funktionen, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Dann sind die Funktionen $\alpha f + \beta g$, fg, und, falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ in x_0 diff'bar. Es gelten:

a) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

b) $(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g^2(x_0)}$.