Beispiele: 1) $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$ $\quad f^{(n)}(x) = ?$

2) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

3) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $f'(x) = nx^{n-1}$

4) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$

<u>Satz 7</u> (<u>Kettenregel</u>)

Es seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f: I \to J$ und $g: J \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen mit:

f ist in $x_0 \in I$ und g in $y_0 = f(x_0)$ diff'bar.
Dann ist $g \circ f$ in x_0 diff'bar. Es gilt

$$\underline{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).}$$

<u>Beispiele</u>: 1) $h(x) = e^{f(x)}$. $h'(x) = e^{f(x)} f'(x)$.

2) $h(x) = \sin(\frac{1}{x})$. $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x})$

3) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. $h'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

h ist auf $\mathbb{R}$ stetig und diff'bar. h' ist in $x = 0$ nicht stetig.

Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wird durch $C^n(I)$ die folgende Menge bezeichnet: $C^n(I) = \{f: I \to \mathbb{C} \,/\, f^{(n)} \in C^0(I)\}$
$(f^{(n)} \in C^0(I) \Leftrightarrow f^{(n-1)} \in C^1(I))$

$f \in C^n(I)$ heißt <u>n-mal stetig diff'bar auf I</u>

Es gelten: $C^n(I) \subset C^{n-1}(I) \subset \ldots \subset C^1(I) \subset C^0(I)$

$$f \in C^\infty(I) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} f \in C^n(I) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$$

Beispiele: sin, cos, exp, sinh, cosh, Polynome $\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Satz 8 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f: I \to J = f(I), \quad y \to x = f(y)$$ stetig, bijektiv und in $y_0 \in I$

diff'bar mit $f'(y_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion

$$g: J \to I, \quad x \to y = g(x)$$ in $x_0 = f(y_0)$ diff'bar.

Es gilt:
$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

Beispiele: 1) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ ist stetig, bijektiv und diff'bar für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion
$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$ ist in $x = 0$ nicht diff'bar.

2) $g(x) = \ln|f(x)|$. $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ für die x mit $f(x) \neq 0$.

3) $h(x) = |x|^\alpha$ $(x \neq 0, \alpha \in \mathbb{R})$
$$h'(x) = \operatorname{sign}(x)\, \alpha\, |x|^{\alpha-1} \quad (x \neq 0)$$

4) $f(x) = \tan(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$g = \operatorname{Arctan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

5) $f(x) = x^x \quad (x > 0) \rightarrow \ln f(x) = x \ln x$

$$\xrightarrow{D} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1$$

$$\rightarrow f'(x) = x^x \ln(x) + x^x$$

(logarithmisches Differenzieren)

6) $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \quad . \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right).$

14.7 Extremwerte. Mittelwertsatz Differentialrechnung (MWSDR)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben.

Gilt mit $x_0 \in I$ $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$, so heißt $f(x_0)$ globales Maximum für f auf I, gilt $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$ aus einer Umgebung von x_0, so liegt in x_0 ein lokales Maximum für f.

f besitzt in x_0 ein lokales (globales) Minimum, falls $-f$ in x_0 ein lokales (globales) Maximum hat.

Ein Maximum oder Minimum ist ein Extremwert von f. (ein Extremum)

Satz 1: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in (a,b)$ einen lokalen Extremwert. Es sei f in x_0 diff'bar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

(Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht, dass f in x_0 extremal wird)

Bemerkung: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann extremal werden in Punkten $x \in (a,b)$, in denen $f'(x) = 0$ gilt oder in Punkten aus (a,b), in denen f nicht diff'bar ist oder am Rand in a oder b.

Satz 2 (Satz von Rolle)

(V) Es sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) diff'bar.
Es gelte $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.
($\Leftrightarrow$ Dann gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$ mit $f'(a+\vartheta(b-a)) = 0$).

Satz 3 (MWSDR)

f, g erfüllen (V) aus Satz 2.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$.

Satz 4 (setze in Satz 3 $g(x) = x$)

f genüge (V) aus Satz 2.
Für beliebige $x, x_0 \in [a,b]$ gilt: es gibt ein ξ zwischen x, x_0, so dass $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$ gilt.

Satz 5

Es sei f auf dem Intervall I definiert und dort diff'bar. Es gelten:

1) $f' > 0$ (<0) auf $I \longrightarrow f \uparrow (\downarrow)$ streng

2) $f' \geq 0$ (≤ 0) auf $I \longleftrightarrow f \uparrow (\downarrow)$

3) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \longleftrightarrow f(x) = \text{const}, \ x \in I$

Beispiele: 1. f, g seien auf $[a,b]$ diff'bar. Aus $f'(x) \leq g'(x), a \leq x \leq b$ folgt: $f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a), a \leq x \leq b$.

2. Es sei $c \in \mathbb{C}$. Es gilt: Jede diff'bare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die $f'(x) = cf(x), x \in \mathbb{R}$, gilt, hat die Form $f(x) = \alpha e^{cx}, x \in \mathbb{R}$, mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$.

14.8 Der Hauptsatz der Differentialrechnung (DR) und Integralrechnung (IR)

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $f: I \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ eine Funktion.
$F: I \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ heißt Stammfunktion von f, falls F auf I diff'bar ist und $F'(x) = f(x)$, $x \in I$ erfüllt ist.

Satz (Hauptsatz DR-IR)

Es sei $f \in C^0([a,b])$ und $c \in [a,b]$ beliebig, fest.
Dann gelten:

1) $F_c : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$, $F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$, $a \le x \le b$, ist Stammfunktion von f. Jede andere Stammfunktion F von f hat die Form $F(x) = F_c(x) + k$, k konst $(\in \mathbb{C})$

(Man erhält alle Stammfunktionen, indem man zu F_c beliebige Konstanten addiert.)

2) Ist F Stammfunktion von f, so gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \left(=: F(x)\Big|_{x=a}^{b}\right).$$

Das unbestimmte Integral von f — geschrieben $\int^x f(t)\,dt$ — ist die Menge aller Stammfunktion von $f = \{F / F_c + k, k \in \mathbb{C}\}$ wobei $F_c'(x) = f(x)$, $x \in I$, gilt.

14.9 Methoden der Integration

1. Satz 1 (partielle Integration)

Es seien f, g aus $C^1([a,b])$. Es gilt für $x \in [a,b]$:
$$\int_a^x f(t) g'(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x f'(t) g(t)\,dt$$

Beispiele:

1) $\int_a^x f(t)\,dt = t f(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x t f'(t)\,dt$

– Für $f(t) = \ln(t)$ gibt das $(0 < a \leq x \leq b)$:

$$\int_a^x \ln t \, dt = x(\ln x - 1) - a f(a) + a$$

– $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

2) $\int_a^x t g'(t)\,dt = x g(x) - \int_a^x g(t)\,dt \underbrace{-a g(a)}_{+k}$

– $\int_a^x t e^t\,dt = x e^x - e^x \overbrace{-a e^a + e^a}$

2. Satz 2 (Substitutionsregel)

$f: [c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig und $g: [a,b] \to [c,d]$ sei stetig diff'bar. Es gilt für $a \leq x \leq b$:

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f(\tau)\,d\tau = \int_a^x f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Beispiele: 1) $\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln\left|\frac{g(b)}{g(a)}\right|$

2) $\int_a^b (g(t))^n g'(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\left(g(b)^{n+1} - g(a)^{n+1}\right),\ n \in \mathbb{N},$

3) $\int^x e^{\sqrt{t}}\,dt = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + k$