4) $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t-z_0)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, $z_0\in\mathbb{C}$

j) $\underline{n>1}$: $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t-z_0)^n} = \frac{1}{1-n}(x-z_0)^{1-n}$

jj) $\underline{n=1}$, $\underline{z_0\in\mathbb{R}}$ $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t-z_0} = \ln|x-z_0|$

jjj) $\underline{n=1}$, $z_0=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \beta\neq 0)$

$$\int^x \frac{dt}{t-\alpha-i\beta} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right)+i\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

---

3. Partialbruchzerlegung

3.1 $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Aus $a_k\in\mathbb{R}$ $(k=0,1,\dots,n)$ und $p(a)=0$ folgt $p(\bar a)=0$.

3.2 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, $(c_k\in\mathbb{C})$, $\text{grad}(f)=n \Leftrightarrow c_n\neq 0$.

Aus $f(a)=0$ folgt $f(x)=(x-a)g(x)$ mit einem Polynom g vom Grad $n-1$.

3.3 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n\geq 1$ hat eine (i.a. komplexe) Nullstelle.

3.4 (Folgerung aus 3.2, 3.3)

Ein Polynom $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ $(c_k\in\mathbb{C}, c_n\neq 0)$ vom Grad n hat genau n Nullstellen $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, von denen $a_1=\alpha_1=\dots=\alpha_{k_1}$, $a_2=\alpha_{k_1+1}=\dots=\alpha_{k_1+k_2}$, $\dots$, $a_s=\alpha_{k_1+\dots+k_{s-1}+1}=\dots=\alpha_{k_1+\dots+k_s}(=\alpha_n)$ verschieden sind. Es gilt

$$f(x) = c_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) = c_n(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_s)^{k_s}$$

mit $k_j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^{s} k_j = n$ und $a_l \neq a_m$ $(l \neq m)$.

k_j ist die Ordnung der Nullstelle a_j (a_j heißt k_j-fache Nullstelle von f).

Beispiel: $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

$$= (x-1)(x-1)(x-1)(x+1)(x+1)$$
$$= (x-1)^3 (x+1)^2$$

$n = 5$, $s = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = a_1 = 1$, $\alpha_4 = \alpha_5 = a_2 = -1$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$.

3.5 Es sei $R(x) = \dfrac{p(x)}{(x-a)^k g(x)}$ mit Polynomen p, g, die $p(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$ und $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} g + k$ erfüllen. Es gibt dann eindeutig eine Zahl γ_k und ein Polynom h mit $\operatorname{grad} h < \operatorname{grad} g + k - 1$, so dass die Darstellung

$$R(x) = \frac{\gamma_k}{(x-a)^k} + \frac{h(x)}{(x-a)^{k-1} g(x)}$$ gilt

Wendet man dies k-mal an, so erhält man Zahlen $\gamma_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_1$ und ein Polynom f mit $\operatorname{grad}(f) < \operatorname{grad}(g)$, so dass gilt:

$$R(x) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\gamma_l}{(x-a)^l} + \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3.6 Satz 3 (Partialbruchzerlegung) (s-fache Anwendung von 3.5)

p, q seien Polynome mit: grad $p <$ grad q, $q(x) = \prod_{j=1}^{s} (x-a_j)^{k_j}$ mit $a_\ell \neq a_k$ $(\ell \neq k)$, $k_j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^{s} k_j =$ grad q, $p(a_j) \neq 0$ für $j = 1, \ldots, s$. Dann hat man mit eindeutig bestimmten Zahlen $\gamma_{\ell m} \in \mathbb{C}$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{\ell=1}^{s} \left(\frac{\gamma_{\ell 1}}{x-a_\ell} + \frac{\gamma_{\ell 2}}{(x-a_\ell)^2} + \cdots + \frac{\gamma_{\ell k_\ell}}{(x-a_\ell)^{k_\ell}} \right)$$

Da von $\frac{\gamma_{\ell j}}{(x-a_\ell)^j}$ die Stammfkt bekannt ist, hat man eine von $\frac{p(x)}{q(x)}$. (S. 62 oben)

Beispiele:

1) $$\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = x+1+\frac{x+2}{x^2-1} = x+1+\frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

2) $$\frac{x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

3) $$\frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1} = \frac{3}{8}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}i}{x+i} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}i}{(x+i)^2} + \frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}i}{(x+i)^2}$$

---

15. Kapitel Taylorformel. Taylorreihen. Extremwerte

15.1 (V) $\begin{cases} n \in \mathbb{N},\ f \in C^{n+1}(I),\ I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall}, \\ a, x \in I. \end{cases}$

Es gilt (mit partieller Integration)

(*) $$R_{k+1} := \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} f^{(k+1)}(a) + R_{k+2}$$

$k = 0, 1, 2 \ldots$

Ausgehend von $R_1 = f(x) - f(a)$ erhält man durch sukzessives Anwenden von (*) den

Satz 1 (Taylorsatz)

Es sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $a, x \in I$. Dann gilt

(T) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1} \quad \text{(Taylorformel)}$$

mit $$R_{n+1} = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

MWSIR (S.52/Satz 4) $$\overset{\downarrow}{=} f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a)) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ mit einer Zahl } \vartheta \in (0,1).$$

Mit $R_{n+1} = o(1)(x-a)^n \quad (x \to a)$ ("o" Landau-Symbol/S.53)

und den Bezeichnungen: $T_j(x) = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ (j-tes Taylorpolynom)

kann (T) so geschrieben werden:

($\tilde{T}$) $$f(x) = T_{n-1}(x) + \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + o(1)\right](x-a)^n \quad (x \to a).$$

(Für $n=1$ ist das Satz 5 (S.54 ($x_0 \to a$, $r(x) = o(1)$):
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(1)(x-a).)$$

15.2 Satz 2 (Folgerung aus ($\tilde{T}$))

Es sei $f \in C^{n+1}([\alpha, \beta])$ und $a \in (\alpha, \beta)$.

Es sei $f^{(j)}(a) = 0$ für $j = 1, 2, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Dann gelten:

Ist n ungerade, so besitzt f in a keinen lokalen Extremwert.

Ist n gerade, so liegt

im Fall $f^{(n)}(a) > 0$ bei a ein lokales Minimum,

im Fall $f^{(n)}(a) < 0$ bei a ein lokales Maximum.

Es sei $f \in C^2([\alpha,\beta])$ und $a \in (\alpha,\beta)$. In a liegt für f ein <u>Wendepunkt</u> vor, wenn $f''(x)$ bei a das Vorzeichen wechselt. <u>Sattelpunkte</u> sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

<u>Satz 3</u> (Folgerung aus $(\tilde{\text{I}})$, Wenden Sie $(\tilde{\text{I}})$ auf f'' an)
Es seien $f \in C^{n+1}([\alpha,\beta])$, $n \geq 3$, n ungerade und $a \in (\alpha,\beta)$. Dann folgt aus $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$, dass für f bei a ein Wendepunkt vorliegt.

<u>15.3</u> 1) – Erinnerung an Kapitel 12, insbesondere an S. 41-44

– Ist $f \in C^n(I)$, $a \in \mathring{I}$ und T_n das n-te Taylorpolynom von f in a, so gilt

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad , k = 0,1,2,\dots,n.$$

(vgl. Beispiel 4), S. 56)

2) <u>Satz 4</u>

Es sei f die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ für $x \in I = (x_0 - r, x_0 + r)$ (r Konvergenzradius) definierte Funktion. Es gelten:

a) $f \in C^\infty(I)$

b) $f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+j)(k+j-1)\cdots(k+1) a_{k+j} (x-x_0)^k$, $x \in I$

("Potenzreihen werden gliedweise differenziert.")

c) $a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \quad , j = 0,1,2,\dots$

<u>Bemerkungen:</u>

<u>1.</u> Die Aussagen beinhalten, dass die Konvergenzradien der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ dieselben sind

2. Ist $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ also $s_n \to f$ $(n\to\infty)$ auf I,

so bedeutet (b) die Aussage (für $j=1$):

$$\underbrace{D(\lim_{n\to\infty} s_n)(x)}_{f'(x)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(D s_n)(x)}_{\lim s_n'(x)} \quad , x \in I$$

dass also die beiden Grenzwertbildungen D (Differentiation) und $\lim_{n\to\infty}$ vertauschbar sind.

3) Für $f \in C^\infty(I)$, $x, x_0 \in I$, kann formal <u>die Taylorreihe von f um x_0</u>: $T(f, x_0)$ gebildet werden:

$$T(f, x_0)(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Ist f die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ auf $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ definierte Funktion, so gilt:

$$(f(x) =) \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = T(f, x_0)(x)$$: "Eine Potenzreihe ist die Taylorreihe der durch sie dargestellten Funktion."

<u>Beispiele</u>:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$, $|x|<1$ $(r=1)$

Satz 4/c) $\to$ $(-1)^k = \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)$, $0 = \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$

für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Also $D^{200} f(0) = 200!$, $D^{201} f(0) = 0$.