2) <u>Binomialreihe</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$

stellt für $|x|<1$ $(r=1)$ die C^{∞}-Funktion f dar, für die gelten
$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = \alpha f(x), & |x|<1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \underline{f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k} \quad (|x|<1).$$

<u>15.4</u> <u>Satz 5</u>

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^{\infty}(I)$. Dann konvergiert $T(f,x_0)(x)$ (die Taylorreihe von f um x_0) gegen f genau für diejenigen $x \in I$, für die $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ gilt.
Dies ist z.B. dann für alle $x \in I$ erfüllt, wenn es Konstanten A, B so gibt, dass $|f^{(n)}(x)| \leq A B^n$ für alle $x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

<u>Beispiele</u>:

1) (12.Ü, A4c)

Für $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ gelten:

$$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \rightarrow T(f,0)(x) = 0 \quad \forall x$$

Es ist $T(f,0)(x)$ zwar konvergent, stellt aber die Nullfunktion und nicht die Funktion f dar: f lässt sich in der Nähe von 0 nicht in eine Potenzreihe entwickeln.

2) $f(x) = \ln(1+x)$, $x = 0$. $f \in C^{\infty}$(Umgebung von 0).
Mit $f(0) = 0$ und $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+x)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$
(Ü!)

erhält man $T(\ln(1+x),0)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

und $T(\ln(1+x),0) = \ln(1+x)$ für $-1 < x \leq 1$.

Es folgt insbesondere $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k-1}$.

Bemerkung: Für $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ mit $r = 1$ hatten wir hergeleitet: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$. Wegen $f(0) = 0$ folgt hieraus auch $f(x) = \ln(1+x)$, $|x| < 1$.

3) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 > 0$. Gesucht Entwicklung um x_0.

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k-1} \frac{1}{x_0^k}(x-x_0)^k, \quad 0 < x \leq 2x_0.$$

---

16. Kapitel Die Regeln von L'Hospital

Satz: f, g seien auf (a,b) definiert und dort diff'bar. In einer linksseitigen Umgebung von b werden $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ vorausgesetzt. Es seien erfüllt:

1. Fall: $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to b^-$

2. Fall: $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$

Für beide Fälle gilt:

Existiert $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (auch im uneigentlichen Sinn), so existiert auch $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte stimmen überein.

(analog für $x \to a+$. $a = -\infty$ oder $b = \infty$ sind zugelassen)

Bemerkung: Der erste Fall behandelt den unbestimmten Ausdruck $\left(\frac{0}{0}\right)$, der zweite Fall den Ausdruck $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Auf diese beiden Fälle lassen sich die weiteren unbestimmten Ausdrücke zurückführen. Das geht schematisch so:

$$\infty \cdot 0 = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \ \underline{\underline{(*)}} \ \left(\frac{0}{0}\right), \quad \infty - \infty = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty \cdot \infty}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{-0 \cdot \infty} \ \left(\underline{\underline{(*)}}\right), \quad \infty^0 = e^{0 \ln(\infty)} = e^{0 \cdot \infty} \ \left(\underline{\underline{(*)}}\right),$$

$$1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0} \ \left(\underline{\underline{(*)}}\right).$$

Es ist dies wie folgt zu lesen: z. B. der Fall ∞^0:
Gelten $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to 0$ für $x \to b-$, so hat man

$$\lim_{x \to b-} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x \to b-} (g(x) f(x))\right)$$

und $\lim_{x \to b-} (g(x) f(x)) = \lim_{x \to b-} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{0}{0}\right).$

<u>Beispiele</u>: 1) $\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad (\alpha > 0)$

$\lim_{x \to 0+} x^x = 1$

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = 2$

4) $\lim_{x \to \pi/4} (\tan(x))^{\tan(2x)} = \frac{1}{e} \quad (\ddot{U})$

5) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

17. Kapitel Differenzieren und Integrieren von Potenzreihen

17.1 Erinnerung an: $\|f\|_\infty$, Ungleichungen bei Integralen, Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung, gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenfolgen, Potenzreihen.

17.2 Satz 1 (Vertauschen von lim und $\int$)

(f_n) sei eine Folge von Funktionen aus $C^0([a,b])$, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert.
Es gilt dann:
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx\right)$$

Beispiel: Die Funktionen
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}, \quad n\in\mathbb{N},$$

sind aus $C([0,1])$, konvergieren für $n\to\infty$ auf $[0,1]$ punktweise gegen $f=0$, aber nicht gleichmäßig.
Es gilt
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 0\,dx = 0$$

Folgerung aus Satz 1: Für $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $|x-x_0|<r$

gilt
$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}, \quad |x-x_0|<r.$$

Satz 2 (Vertauschen von lim und D)

(f_n) sei eine Folge von Funktionen aus $C^1([a,b])$.
Es existiere $\lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$ für ein $\xi\in[a,b]$,

und die Folge (f_n') konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig.
Dann existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x\in[a,b]$.
Es ist $f\in C^1([a,b])$, und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für jedes $x\in[a,b]$.

<u>(Gegen)Beispiel:</u>

$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig diff'bare Funktionen

Es gilt $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig, aber nicht

$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos(nx) \to 0$ $(n \to \infty)$.

<u>aus Satz 2</u>

<u>Folgerung:</u> Aus $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $|x-x_0| < r$, folgt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}, \quad |x-x_0| < r.$$

Beispiele: 1) $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{k!} (-1)^k t^{2k} dt \right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \frac{1}{k!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$

$x \in \mathbb{R}$

3) $\operatorname{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad |x| < 1$ $\underline{(*)}$

Mit $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + \frac{q^n}{1-q}$ $(q \neq 1)$ und $q = -t^2$

erhält man

$$\int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt = \operatorname{Arctan}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

und hieraus unter Verwendung des MWSIR

$$\int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \overset{0<\vartheta<1}{=} \frac{1}{1+\vartheta x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ und $n \to \infty$, dass die

Darstellung $\overline{(*)}$ für $\underline{|x| \leq 1}$ richtig ist.

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$