# 18. Kapitel Uneigentliche Integrale

## 18.1 Definitionen

Typ 1) Es sei $f$ auf $[a,b)$ definiert $(b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ und über $[a,\beta]$ für jedes $\beta$ mit $a < \beta < b$ integrierbar.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f(x)\,dx \text{, falls dieser Grenzwert existiert.}$$

Beispiele: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s}$

Typ 2) Es sei $f$ auf $(a,b]$ definiert $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ und über $[\alpha,b]$ für jedes $\alpha$ mit $a < \alpha < b$ integrierbar.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(x)\,dx \text{, falls dieser Grenzwert existiert.}$$

Beispiele: $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$, $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s}$

Typ 3) Es sei $f$ auf $(a,b)$ definiert $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ und über $[\alpha,\beta]$ für alle $\alpha, \beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$ integrierbar. Es sei $\gamma \in (a,b)$ beliebig.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underbrace{\int_a^\gamma f(x)\,dx}_{\text{Typ 2)}} + \underbrace{\int_\gamma^b f(x)\,dx}_{\text{Typ 1)}}$$

, falls beide Integrale rechts unabhängig voneinander existieren.

Beispiele: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$.

Typ 4) Es sei $c \in (a,b)$ und $f$ auf $[a,b] \setminus \{c\}$ erklärt. Existieren die Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ (Typ 1)) und $\int_c^b f(x)\,dx$ (Typ 2)) unabhängig voneinander, so wird definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Beispiele: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, $\int_{-1}^{+1} \ln|x|\,dx$

Bemerkung: Existieren in den vorangehenden Definitionsgleichungen die rechten Seiten, so sagt man, das Integral links: $\int_a^b f(x)\,dx$: existiert oder konvergiert. Andernfalls existiert es nicht oder ist divergent.

## 18.2 Beispiele

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ ist konvergent nur für $s>1$. Es gilt dann

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ ist konvergent nur für $s<1$. Es gilt dann

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$$

3) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ ist für jedes $s \in \mathbb{R}$ divergent.

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

5) $\int_0^\infty e^{-kx}\,dx$ ist konvergent (und $=\frac{1}{k}$) nur für $k>0$.

## 18.3 Satz 1 (Majoranten/Minoranten-Kriterium)

$f, g$ seien über $[a, \beta]$ für jedes $\beta$ mit $a<\beta<b$ (definiert und) integrierbar. Aus $0 \le f(x) \le g(x)$, $a \le x \le b$, folgen 1) Ist $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent

2) Ist $\int_a^b f(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.

Weitere Beispiele

6) (mit 5) und Satz 1)

$\int_0^\infty e^{sx} |\cos tx|\,dx$ ist konvergent für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $s>0$.

7) Die Gammafunktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$

ist für $x>0$ definiert (das Integral ist genau für $x>0$ konvergent; vgl. auch 13. Ü/A6).

Es gilt $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, $n = 1,2\ldots$

Wegen $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ folgt: $\Gamma(n+1) = n!$

für $n = 0,1,2\ldots$.

---

18.4 Ist $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent, so heißt $\int_a^b f(x)\,dx$

absolut konvergent.

Satz 2: Ist $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist

$\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

Die Umkehrung gilt nicht: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist konvergent,

$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ ist divergent.

18.5 Satz 3 (Integralkriterium)

Es sei $f \in C([0,\infty))$, monoton fallend und nicht negativ. Es gilt dann:

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ ist konvergent} \longleftrightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ ist konvergent.}$$

Beispiele: 1) Für $s \le 1$ ist $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ divergent,

für $s>1$ ist $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ konvergent

2) Für $s>1$ gilt $\frac{1}{s-1} < \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s} < \frac{s}{s-1}$

3) $\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$

# 19. Kapitel Zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen (GDGln)

## 19.1 Beispiele

radioaktiver Zerfall $\dot{n}(t) = -\lambda n(t)$

Schwingungsgleichung $m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

($m, d, k$ Konstante)

$F(t) = 0$ freie Schwingung, $F(t) \neq 0$ erzwungene Schwingung

Pendelgleichung (math. Schwerependel) $\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \sin\varphi(t) = 0$

logistische Gleichung (Wachstumsmodelle) $\dot{y}(t) = (a - b y(t)) y(t)$

($a, b$ Konstante)

Ü: Schlage in Büchern nach, wie diese Gleichungen hergeleitet werden.

## 19.2 Die GDGL mit getrennten Variablen

gegeben sind $f \in C(I_1), g \in C(I_2)$ ($I_1, I_2$ Intervalle).
Die DGL

(1) $y' = f(x) g(y)$

heißt: DGL mit getrennten Variablen. Lösen von (1) bedeutet:

Bestimme eine stetig diff'bare Funktion $y = \varphi(x)$, $x \in \tilde{I}_1 \subset I_1$ mit $\varphi(\tilde{I}_1) \subset I_2$ und $\varphi'(x) = f(x) g(\varphi(x))$ $\forall x \in \tilde{I}_1$.

Satz 1 Es sei $J \subset I_2$ ein Intervall mit $g(t) \neq 0$ für $t \in J$. Dann wird jede Lösung $\varphi$ der DGL (1) mit $\varphi(\tilde{I}_1) \subset J$ implizit durch

(2) $$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_c^x f(t)\,dt \quad (x, c \in \tilde{I}_1)$$ gegeben.

Die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \tilde{I}_1 \times J$ ist $\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

Ist $y_1$ eine Nullstelle von $g$, so ist $y = \varphi(x) = y_1$, $\forall x$, Lösung.

Lösungsvorgehen (im Fall $g(t) \neq 0$):

1. $S$ sei Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und $F$ eine Stammfunktion von $f$.

2. (2) bedeutet: $S(\varphi(x)) = F(x) + k$ ($k$ konst)
(implizite Lösungsdarstellung)

Da $S'(t) = \frac{1}{g(t)} \neq 0$, kann nach $\varphi$ aufgelöst werden: $y = \varphi(x) = S^{-1}(F(x) + k)$ explizite Lösung.

Beispiele: 1) $y' = f(x)\, y$ (lineare homogene DGL 1. Ordnung) $f$ ist stetige Funktion
Satz 1 ergibt

Satz 2. Die allgemeine Lösung der DGL $y' = f(x)\, y$ ist durch $y = \varphi(x) = c \exp(F(x))$ mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ gegeben. Hierbei sind $c$ und $x_0$ beliebige Konstanten.
Die Lösung durch den Punkt $(x_0, y_0)$ ist
$y = \varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$.

2) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Ähnlichkeitsdgl. ($x \neq 0$)
$f$ ist eine gegebene stetige Funktion.

Ist $y = \varphi(x)$ Lösung der Gleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, so gilt für $u(x) := \frac{\varphi(x)}{x}$ die Gleichung:

$$u'(x) = \frac{1}{x}\left(f(u(x)) - u(x)\right)$$

Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen.
Mit Satz 1 erhält man $u = u(x)$, und nach Def von $u$ ist dann $y = \varphi(x) = x\, u(x)$ Lösung der Gleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Beispiel: $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ ($x \neq 0$).

## 19.3 Die Bernoulli DGl

$$\underline{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}}, \quad x \in I, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$$

Es sind $p, q \in C^0(I)$ gegebene Funktionen. Gesucht sind Funktionen $y = \varphi(x) > 0$, $x \in \tilde{I} \subset I$, die die Gleichung lösen.

Ist $y = \varphi(x)$ Lösung, so multipliziere die Gleichung mit $\underline{\mu(x) := \exp(\int_{x_0}^{x} p(t)dt)}$. Man erhält für $\mu(x)\varphi(x)$ eine DGl mit getrennten Variablen. Lösen mit Satz 1 ergibt

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\varphi(x_0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} q(t)\mu(t)^{1-\alpha}dt\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ist $x_0$ beliebig, so ist das die allgemeine Lösung.
Ist $x_0$ fest, so ist das die Lösung durch $(x_0, y_0 = \varphi(x_0))$.

<u>Beispiel</u> 1) $y' + (\tanh(x))y + \frac{1}{2}(\cosh^2(x))y^3 = 0$
$y(0) = 1$

2) <u>Die lineare inhomogene DGl 1. Ordnung</u>

$$\underline{y' + p(x)y = q(x), \quad x \in I}$$

Setze oben $\alpha = 0$ (und in der Lösungsdarstellung $\varphi(x_0) = c$):

$$y = \varphi(x) = c\,e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\int_{x_0}^{x} q(t)\,e^{\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau}dt$$

mit einer beliebigen Konstanten c