Gegeben sind $f: X \to Y$ und $y \in Y$. Gesucht ist $x \in X$ mit
$f(x) = y$. x heißt Lösung der Gleichung $f(x) = y$.

Ist f surjektiv, so hat die Gleichung mindestens eine Lösung.

Ist f injektiv, so hat die Gleichung höchstens eine Lösung. Sie hat im Fall $y \in f(X)$ genau eine Lösung.

Ist f bijektiv, so hat die Gleichung genau eine Lösung.

<u>Satz 2.1</u> Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so gibt es genau eine Abbildung $g: Y \to X$ mit den Eigenschaften
$$g \circ f = id_X \text{ und } f \circ g = id_Y.$$

Die hierdurch eindeutig definierte Funktion $g: Y \to X$ wird durch <u>f^{-1}</u> bezeichnet und heißt die <u>zu f inverse Funktion.</u>

<u>Satz 2.2</u> Hat man Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$, die $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$ erfüllen, so sind f und g bijektiv (mithin nach Satz 2.1 zueinander invers: $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$! Hieraus folgt: $(f^{-1})^{-1} = f$)

<u>Satz 3</u> $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ seien bijektiv. Dann ist $g \circ f: X \to Z$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$

<u>Beispiele</u>: 1) $a \neq 0$, b seien gegebene Zahlen. Für
$$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R} \text{ gilt}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Zu $f: \{x \mid x > 0\} \to \{x \mid x > 0\}$, $f(x) = x^2$ gehört
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

4. Kapitel Die reellen Zahlen

Axiomensystem für die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{R}$, *mit den Verknüpfungen:*
Addition: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$;
Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$;
sowie einer **Anordnung**, *gegeben durch eine Teilmenge, den* **Positivitätsbereich** $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. *Für diese Daten gilt:*

(K) **Körperaxiome:**
Die Menge $\mathbb{R}$ *mit Addition und Multiplikation bildet einen Körper.*

(A) **Axiome der Anordnung:**
(A.1) *Es gilt genau eine der Aussagen* $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \in \mathbb{R}_+$, $x = 0$.
(A.2) $x,y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}_+$.
(A.3) $x,y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}_+$.

(V) **Vollständigkeitsaxiom**
Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

Körperaxiome

Addition
Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt:
$(x+y)+z = x+(y+z)$,
$x+y = y+x$.
Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, sodaß
$x+0 = x$,
und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein "negatives" $(-x) \in \mathbb{R}$ existiert, mit der Eigenschaft
$x+(-x) = 0$.

Multiplikation
Für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt:
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, **Assoziativität**,
$x \cdot y = y \cdot x$. **Kommutativität.**
Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, sodaß $1 \neq 0$ und
$1 \cdot x = x$,
und sodaß für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, ein "inverses" $x^{-1} \in \mathbb{R}$ existiert, mit der Eigenschaft
$x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributivgesetz.

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Versuchen Sie zur Übung nur mit obigen Axiomen, die folgenden Aussagen zu begründen:

1) Negatives und Inverses sind jeweils eindeutig bestimmt.

2) $x0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Gilt für $x, y \in \mathbb{R}$: $xy = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$.

4) $(-1)(-1) = 1$

Zu den Axiomen der Anordnung

Def: $x > 0$, falls $x \in \mathbb{R}_+$ (x heißt positiv)

$x > y$, falls $x - y > 0$

$x < 0$, falls $-x > 0$ (x heißt negativ)

$x \geq y$, falls $x > y$ oder $x = y$

$x < y$, falls $y > x$

Satz 1 (Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen oder Rechnen mit Ungleichungen)

i) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $(a>b) \wedge (b>c) \rightarrow a>c$

ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $(a>b) \rightarrow (a+c>b+c$ für jedes $c \in \mathbb{R})$

iii) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $(a>b) \wedge (c<0) \rightarrow (ac<bc)$

iv) Gilt für zwei Zahlen a, b und jede positive Zahl $\varepsilon>0$: $a \leq b+\varepsilon$, so folgt: $a \leq b$.

Beispiele: 1) $\{x \mid x+\frac{1}{x} \geq 2\} = \{x \mid x>0\}$.

2) Für $x>0, y>0$ gilt: $(x<y) \leftrightarrow (x^2<y^2)$ (Ü)

3) Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x<y$ gilt: $x<\frac{x+y}{2}<y$ (Ü).

Zum Vollständigkeitsaxiom

Es sei $M \subset \mathbb{R}$. Bezeichnungen: $x \leq M$: $x \in \mathbb{R}$ und $x \leq y$ $\forall y \in M$

$x \geq M$: $x \in \mathbb{R}$ und $y \leq x$ $\forall y \in M$

Gibt es eine Zahl x mit $x \leq M$ $(x \geq M)$, so heißt M nach unten (nach oben) beschränkt. x heißt untere (obere) Schranke. M heißt beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Eine untere (obere) Schranke, die zur Menge gehört, heißt Minimum (Maximum):

$$x = \max(M) \iff x \in M \text{ und } M \leq x$$

$$x = \min(M) \iff x \in M \text{ und } x \leq M$$

Bemerkungen: 1) $\min(M) = -\max(-M)$, wobei $-M := \{x \mid -x \in M\}$ ist.

2) Eine nach oben (nach unten) beschränkte Menge besitzt i.a. kein Maximum (Minimum).

Beispiele: $M = \{x \mid x<0\}$, $M = \{\frac{1}{x} \mid x>0\}$.

Eine kleinste obere (größte untere) Schranke einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von M; geschrieben $\sup(M)$ ($\inf(M)$).

Es gelten: $M \le \sup(M)$ und: aus $M \le S$ folgt $\sup(M) \le S$

analog: $\inf(M) \le M$ und: aus $t \le M$ folgt $t \le \inf(M)$.

Es gelten: a) $\inf(M) = -\sup(-M)$

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit
$\sup(M) - \varepsilon < x$ ($x < \inf(M) + \varepsilon$).

Bemerkungen: 1) $M \subset \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein Supremum.

2) Existiert $\max(M)$, so gilt $\max(M) = \sup(M)$.

3) Wir schreiben $\sup(M) < \infty$, falls M nach oben beschränkt ist, $\inf(M) > -\infty$, falls M nach unten beschränkt ist.

$\sup(M) = \infty$ ($\inf(M) = -\infty$) wird geschrieben, wenn M keine obere (keine untere) Schranke besitzt.

Das Vollständigkeitsaxiom kann auch so formuliert werden: Ist $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt, so existiert $\inf(M) \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}$ ist nichtleer ($1 \in M$) und nach oben beschränkt ($M \le 2$). Nach (V) existiert $\sup(M) \in \mathbb{R}$. Man zeigt: $\sup(M) = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

D.h.: In $\mathbb{Q}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht.