Folgerungen aus (V) (S. 8 oben)

<u>Satz 2</u> (Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen)
$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

<u>Satz von Archimedes</u> ($\Longleftrightarrow$ Satz 2)
Zu jeder positiven Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:
$$x \le n \qquad \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0$$

<u>Satz 3</u> ($\Longleftrightarrow$ Satz 2)
Zu jeder positiven Zahl ε gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0$

<u>Folgerung</u>
Für $a \in \mathbb{R}$ sei $0 \le a \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann gilt $a = 0$.

<u>Satz 4</u>
Aus $x, y \in \mathbb{R}$ mit $1 < y - x$ folgt: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < k < y$.

<u>Satz 5</u> ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$)
Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

<u>Satz 6</u> ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$)
Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < \xi < y$.

<u>Ergänzung</u>: $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \to f(x)$
heißt <u>streng monoton wachsend (fallend)</u>, $f\uparrow$ ($f\downarrow$),
falls aus $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ folgt: $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Ü

A1: $f\uparrow \Longleftrightarrow (-f)\downarrow$.

A2: $f\uparrow \Longleftrightarrow (f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in I: x_1 \neq x_2$
$$\Longleftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in I: x_1 \neq x_2$$

A3: $f\uparrow \Longrightarrow f$ ist injektiv

A4: $f\uparrow \Longrightarrow f^{-1}\uparrow$

5. Kapitel IV. Vollständige Induktion

Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt <u>induktiv</u>, falls erfüllt sind:

1) $1 \in M$, 2) Aus $x \in M$ folgt: $x+1 \in M$.

<u>Bemerkungen</u>: – $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ sind Beispiele für induktive Mengen.

– Der Durchschnitt induktiver Mengen ist eine induktive Menge. (Ü)

<u>Def</u> ($\mathbb{N}$) Der Durchschnitt aller induktiver Mengen heißt <u>die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.</u>

<u>Folgerungen</u>: 1) $\mathbb{N}$ ist induktive Menge.

2) Ist M induktiv, so gilt $\mathbb{N} \subset M$.

3) $\min(\mathbb{N}) = 1$

<u>Induktionssatz</u>

Für $M \subset \mathbb{N}$ seien erfüllt: 1) $1 \in M$, 2) Aus $n \in M$ folgt $n+1 \in M$.

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

<u>Erweiterte Fassung des Induktionssatzes</u>

Für $M \subset \mathbb{Z}$ seien erfüllt: 1) $g_0 \in M$, 2) Aus $g \in M$ mit $g \geq g_0$ folgt $g+1 \in M$.

Dann gilt $\{g \in \mathbb{Z} \,/\, g \geq g_0\} \subset M$

<u>Noch eine Fassung des Induktionssatzes</u>

Weiß man von einer Menge $M \subset \mathbb{N}$:

1) $1 \in M$, 2) Aus $\{1, 2, \ldots, n\} \subset M$ folgt $n+1 \in M$:

dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Rekursive Definition

Die Größe $G(n)$ soll für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ definiert werden:

1) Definiere $G(n_0)$

2) $G(n)$ sei für ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, definiert. Definiere hiermit $G(n+1)$.

Beispiele: a_k, $k \in \mathbb{Z}$, seien gegebene Zahlen.

i) $\sum_{k=m}^{n} a_k$ wird für $n \geq m$ so definiert:

1) $\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m$, 2) $\sum_{k=m}^{n+1} a_k := \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}$

ii) $\prod_{k=m}^{n} a_k$ für $n \geq m$:

1) $\prod_{k=m}^{m} a_k := a_m$, 2) $\prod_{k=m}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) a_{n+1}$

Beispiel: $\prod_{k=1}^{n} k =: n!$

Bemerkung Es wird vereinbart, für $m > n$:

$\sum_{k=m}^{n} a_k =: 0$ (leere Summe), $\prod_{k=m}^{n} a_k =: 1$ (leeres Produkt)

$\rightarrow \prod_{k=1}^{0} k = 0! = 1$

Beweis mit vollständiger Induktion

Um die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, nachzuweisen, kann man so vorgehen:

1) Weise $A(n_0)$ nach (Induktionsanfang)

2) Setze voraus, dass für ein $n \geq n_0$ $A(n)$ richtig ist (Induktionsvoraussetz

Beweise, dass dann $A(n+1)$ richtig ist (Induktionsschl

Beispiele: 1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{j=1}^{n}(1+x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Hierbei sind $x_1, \dots, x_n$ beliebige Zahlen ≥ -1, die alle dasselbe Vorzeichen haben.

3) Für $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$
(Bernoullische Ungleichung)

4) Geometrische Summe
Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $q \in \mathbb{R}$ gilt: $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$.

5) Permutationen
Aus n verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich $n!$ n-Tupel $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ so bilden, dass in jedem Tupel jedes der gegebenen Elemente vorkommt.

6) Eine n-elementige Menge besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen. Hier sind $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$.

$\binom{n}{k}$ sind die Binomialkoeffizienten, die so definiert sind:

$\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha - \ell)$. Es gelten $\binom{\alpha}{0} = 1$ und $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ erhält man: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $k \leq n$.

Insbesondere gilt $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

Für $k > n$ gilt $\binom{n}{k} = 0$.

7) Binomischer Satz

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Für $x = y = 1$ gibt das $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$n = 1, 2, \ldots$

Für $x = -y = 1$ gibt das $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

---

6. Kapitel Der Betrag einer reellen Zahl. Ungleichungen

Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert: $|x| := \left\{\begin{matrix} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{matrix}\right\} = \max(x, -x)$

Satz 1 Es sei $a > 0$. Dann gilt:

$-a \leq x \leq a \iff |x| \leq a$.

Für $a > 0$ und x_0 heißt die Menge $\{x \mid |x - x_0| \leq a\}$
$= \{x \mid x_0 - a \leq x \leq x_0 + a\}$ a-Umgebung von x_0: $U_a(x_0)$.

Satz 2 $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelten:

1) $|x| > 0$ für $x \neq 0$ und $|x| = 0$ nur für $x = 0$.

2) $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$,
$|x^2| = |x|^2 = x^2$ und $|x| = \sqrt{x^2}$!

3) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (Δ-Ungleichung)

4) $(|x| \leq |y|) \iff (x^2 \leq y^2)$

Beispiel $\left\{x \mid \left|\frac{x+4}{x+2}\right| \leq 2\right\} = \{x \mid |x| \geq 2\}$

Satz 3 (Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel: GAM-Ungleichung)

1) $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$ $x \geq 0, y \geq 0$

2) $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $x, y \in \mathbb{R}$

Satz 4 (Schwarzsche Ungleichung)

Für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}.$$

Folgerung

Satz 5 (Δ-Ungleichung)

a_j, b_j wie in Satz 4. Es gilt:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}$$

Verallgemeinerung der GAM-Ungleichung (Satz 3)

Für beliebige Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die alle ≥ 0 sind, gilt

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$