7. Kapitel. Die komplexen Zahlen

Mit i als Lösung der Gleichung $x^2+1=0$ ($i^2=-1$) werden formal Ausdrücke der Form $x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, gebildet. Diese Ausdrücke heißen komplexe Zahlen und sie werden addiert und multipliziert, wie das von $\mathbb{R}$ her bekannt ist.

$\mathbb{C} := \{z \mid z = x+iy,\ x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$

$z = x+iy$, $w = u+iv$ seien aus $\mathbb{C}$. Dann sind

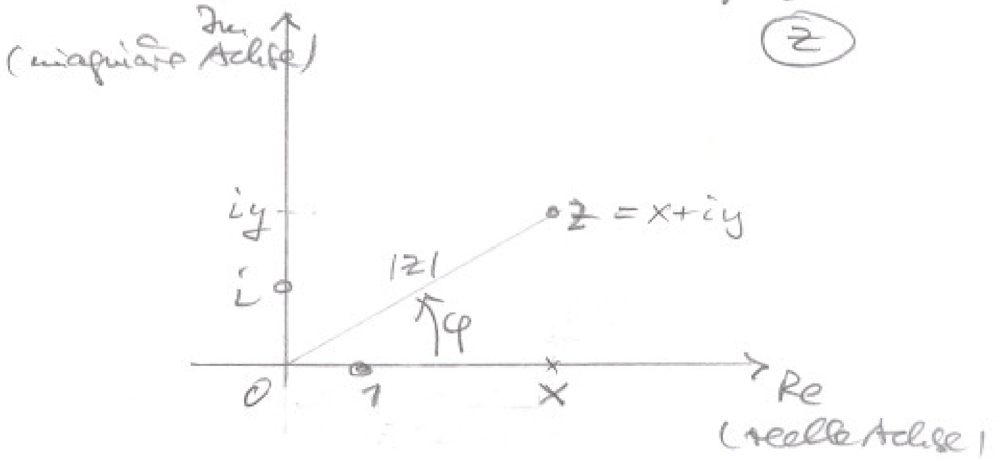
$$z+w = x+u+i(y+v), \quad zw = xu-yv+i(yu+xv)$$

wieder aus $\mathbb{C}$. Es gelten in $\mathbb{C}$ die Körperaxiome (S. 8/Anfang 4. Kapitel).

Jedem $z\in\mathbb{C}$ sind eindeutig $x\in\mathbb{R}$ u. $y\in\mathbb{R}$ mit $z=x+iy$ zugeordnet. x heißt Realteil von z, y Imaginärteil von z: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. $z = w \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

Die $z\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z)=0$ sind die reellen Zahlen: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
Die reellen Zahlen sind also spezielle komplexe Zahlen:
$z = x+i0 = x$. Für $0 = 0+i0$ gilt $z+0=z$ $\forall z$ und für $1 = 1+i0$ gilt $z1 = z$ $\forall z$.

$z\in\mathbb{C}$ werden in der komplexen (z) Ebene (Gaußsche Zahlenebene) veranschaulicht wie folgt:



$|z|$ – der <u>Betrag der Zahl $z \in \mathbb{C}$</u> – ist der Abstand von z zu 0: $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$. Hieraus folgen (oder man liest das aus der Skizze oben ab):

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad , \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| .$$

$\bar{z} \in \mathbb{C}$ – die zu z <u>konjugiert komplexe Zahl</u> – erhält man durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Das ergibt:

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

Man macht sich einfach klar: ($z, w \in \mathbb{C}$)

$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad |\bar{z}| = |z|,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \; (z \neq 0), \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0,$$

$|z - w|$ ist der Abstand der Punkte (Zahlen) z und w

<u>Satz 1</u> Für komplexe Zahlen z und w gelten:

a) $|wz| = |w||z|$, b) $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ $(z \neq 0)$,

c) $|w \pm z|^2 = |w|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |z|^2$

d) $\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

<u>Ü4</u> Es sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Bestimmen Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$. Setzt man $z = x + iy$ und $w = u + iv$, so erhält man für u, v die Gleichungen:

$$u^2 - v^2 = x \quad , \quad 2uv = y$$

<u>Lösung</u>: 1) Ist $z = x \in \mathbb{R}$, so $w = \pm i\sqrt{-x}$, falls $x \leq 0$

$w = \pm\sqrt{x}$, falls $x \geq 0$

2) $y \neq 0$: $w = u + i\frac{y}{2u}$ mit $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x + |z|)}$.

Das Argument von $z = x + iy \neq 0$, geschrieben $\arg(z)$, ist der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, den die Strecke $0z$ mit der positiven reellen Achse einschließt, für den also $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$ gilt. (Skizze S. 17)

Beispiel: $\arg(x) = \pi$ $(x < 0)$, $\arg(1) = 0$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$, $\arg(-1-i) = \frac{5\pi}{4}$

Satz 2 (Polardarstellung von z)

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ kann in der Form $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ dargestellt werden, wobei $r = |z|$ und $\psi = \arg(z) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten.

Satz 3: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$ seien gegebene komplexe Zahlen. Es gelten:

a) $z = w \iff r = \rho$ und $\varphi = \psi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1}$

c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

d) $zw = r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$

e) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $n \in \mathbb{Z}$ (Formel von Moivre)

Satz 4: Es seien $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Gleichung $z^n = a$ hat genau n verschiedene Lösungen und zwar

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Hierbei ist $\alpha = \arg(a)$ und $\arg(z_k) = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Die z_k bilden in der komplexen Ebene die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks; sie liegen auf dem Kreis um 0 mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$.

Beispiele:

$$(\sqrt[3]{-i})_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right), \quad k = 0,1,2$$

$$(\sqrt[4]{1+i})_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0,1,2,3$$

$\ddot{u}^4$: gegeben sind $a, b \in \mathbb{C}$, gesucht sind $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z^2 + 2az + b = 0 \qquad : z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

---

8. Kapitel Folgen. Grenzwert

Eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) heißt komplexe (reelle) Zahlenfolge. Die Folge wird durch ihre Werte $f(n) = a_n$ bezeichnet. Wir sprechen von der Folge (a_n). Die a_n sind die Glieder der Folge.

Beispiele: (a_n): $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = i^n$, $a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$

$a_n = a$ (konstante Folge)

$a_n = n(-1)^n$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (harmonische Reihe),

Die reelle Folge (a_n) heißt monoton wachsend, falls $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$ gilt. Gilt $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$, so heißt die Folge streng monoton wachsend. Die Folge (a_n) heißt (streng) monoton fallend, falls die Folge $(-a_n)$ (streng) monoton wachsend ist. Gilt $a_n \le S$ $\forall n$ ($M \le a_n$ $\forall n$), so heißt (a_n) nach oben (nach unten) beschränkt. S ist eine obere, M eine untere Schranke.

Die Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $S > 0$ so gibt, dass $|a_n| \le S$ $\forall n$ gilt.

Beispiele: Die Folge (a_n): $a_n = i^n$ ist beschränkt.
Die Folge (a_n): $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist nicht beschränkt.

Lemma 1: Es seien $y > 1, x > 0$ fest. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$

$y^n > x$ gilt.

Lemma 2: Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ und jeder Zahl $q: 0 < q < 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $q^n < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0$.

Definition: $c \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) der Folge (a_n), falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - c| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.
("In jeder noch so kleinen Umgebung von c liegen unendlich viele Glieder der Folge")

Beispiele: Die Folge $(a_n): a_n = i^n$ hat die vier HP $1, -1, i, -i$, die Folge (a_n) mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = 2k-1 \\ 1 - \frac{1}{k} & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$ hat die HP 1 und 0.

Satz 1 (Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt einen HP.
(Für reelle Folgen haben wir uns das mittels Intervall-halbierung klargemacht)

Definition (Konvergenz)

Ist die Folge (a_n) beschränkt und besitzt sie genau einen HP g, so heißt die Folge (a_n) konvergent gegen g. Hierfür wird geschrieben: $a_n \to g \ (n \to \infty)$, oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. g heißt Grenzwert der Folge.

Eine Folge (a_n), die nicht konvergent ist, heißt divergent.

Nach obiger Herleitung ist sofort klar, dass eine konvergente Folge nicht mehr als einen Grenzwert besitzt.

Satz 2. Es sei (a_n) eine Zahlenfolge. Es gilt:

$(a_n \to g \ (n \to \infty)) \iff$ (Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass aus $n \geq N(\varepsilon)$ folgt: $|a_n - g| < \varepsilon$)

Ergänzende Bemerkungen

0) "fast alle = alle bis auf endlich viele". Das Kriterium aus Satz besagt somit: $(a_n \to g \ (n\to\infty)) \iff$ (in jeder Umgebung von g liegen fast alle a_n)

1) Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so wird der größte HP durch $\limsup (a_n)$ und der kleinste HP durch $\liminf (a_n)$ bezeichnet. Ist die Folge (a_n) nicht nach oben (unten) beschränkt, so wird auch geschrieben $\limsup (a_n) = +\infty$ ($\liminf (a_n) = -\infty$). $+\infty, -\infty$ heißen dann auch uneigentliche HP. Hiermit kann Satz 1 im reellen Fall auch so formuliert werden: Jede reelle Folge besitzt einen HP.

2) gilt $\limsup (a_n) = \liminf (a_n) = +\infty \ (-\infty)$, so heißt die Folge (a_n) bestimmt divergent oder uneigentlich konvergent gegen $+\infty \ (-\infty)$. Beispiele:

(a_n): $a_n = 2^n$, $a_n = n$, $a_n = n^k$, $a_n = -n$ sind bestimmt divergente Folgen.

Die Folge (a_n) heißt divergent, wenn sie weder konvergent (Seite vorher unten) noch bestimmt divergent ist, wenn sie also in jedem Sinn mehr als einen HP besitzt.

Beispiele: (a_n): $a_n = (-1)^n$, $a_n = n(-1)^n$, $a_n = i^n$. sind divergente Folgen.

3) Wir wollen Divergenz einer Folge formulieren, indem das Kriterium aus Satz 2 negiert wird: Die Folge (a_n) konvergiert nicht gegen g, falls gilt:

Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft: Zu jeder Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ mit $|a_n - g| \geq \varepsilon$.