4) Eine konvergente Folge besitzt nur einen Grenzwert.

5) Aus $a_n \to g$ $(n\to\infty)$ und $g \neq 0$ folgt:
Es gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n.

Beispiele:

1) konstante Folge: (a_n): $a_n = a$ $\forall n$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

2) $d \in \mathbb{C}$, $d \neq 0$, (a_n): $a_n = \frac{d}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3) $q \in \mathbb{R}$, (a_n): $a_n = q^n$

$q = 1$: $a_n \to 1$ $(n\to\infty)$, $|q| < 1$: $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$
$q \leq -1$: (a_n) ist divergent
$q > 1$: $a_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ (uneigentlich konvergent)

Satz 3 Die reelle Folge (a_n) sei monoton wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt. Dann ist die Folge (a_n) konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right)$.

Beispiele: 1) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$: $(a_n)\uparrow$, $a_n < 1$
Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2) (a_n) : $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$(a_n)\uparrow$ und $a_n < 4$ $\forall n$
Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

Satz 4 : (a_n), (b_n) seien reelle konvergente Folgen:
$a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n\to\infty)$ mit $a_n \leq b_n$ für fast alle n.
Dann gilt $a \leq b$.

<u>Satz 5</u> $(a_n), (b_n), (c_n)$ seien reelle Zahlenfolgen.
Es seien $a_n \le b_n \le c_n$ für fast alle n und
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ erfüllt.

Dann ist die Folge (b_n) konvergent. Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

<u>Folgerung</u>: Ist (a_n) eine Zahlenfolge und (b_n) eine reelle Nullfolge (Grenzwert Null), so folgt aus $|a_n| \le b_n$ für fast alle n : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Satz 6</u>. $(a_n), (b_n)$ seien konvergente Folgen: $a_n \to a$ $(n\to\infty)$, $b_n \to b$ $(n\to\infty)$. Dann sind auch die Folgen
$(a_n \pm b_n)$, $(a_n b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $(b \neq 0)$, $|a_n|$, a_n^k $(k\in\mathbb{N}, k \text{ fest})$, $(\sqrt{a_n})$ $(a_n > 0)$ konvergent. Es gelten:
$a_n \pm b_n \to a \pm b$, $a_n b_n \to ab$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, $|a_n| \to |a|$,
$a_n^k \to a^k$, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ (jeweils für $n\to\infty$).

<u>Beispiele</u>: 1) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

2) $\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n}) = \infty$ (uneigentlich gegen ∞ konvergent)

<u>Beispiele</u>: 1) <u>geometrische Reihe</u>:
Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$

2) $c > 0$ sei gegeben.
Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

…schachtelung)

$(\alpha_n)\uparrow$, $(\beta_n)\downarrow$ seien monotone Zahlenfolgen, die den Bedingungen 1) $\alpha_n \le \beta_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$ genügen.

Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \le x \le \beta_n \quad \forall n$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = x.$$

(Definiere die Intervalle $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Dann besagen die Voraussetzungen: $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (\text{Länge von } I_n) = 0$. Die Aussage des Satzes ist $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} I_\nu = \{x\}$.)

<u>Satz 8</u> (Leibnizkriterium für alternierende Reihen)

Gegeben ist $(a_n)\downarrow$, $a_n > 0$ und $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dann existiert $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k a_k =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n =: S$.

Für $s_m := \sum\limits_{n=0}^{m} (-1)^n a_n$ $\quad (m \in \mathbb{N})$ gelten:

1) $s_{2k+1} \le S \le s_{2k}$ $\quad (k = 0, 1, \dots)$, 2) $|S - s_m| \le a_{m+1}$
$(m = 0, 1, 2, \dots)$

(Setze $\alpha_k := s_{2k+1}$, $\beta_k := s_{2k}$ und weise die Bedingungen aus Satz 7 nach. Das x in Satz 7 ist hier S.)

<u>Beispiel</u>: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

ist konvergent. Wir werden später sehen, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2$ ist. Aus 1) oben folgt dann etwa

$$s_3 = \frac{7}{12} < \ln 2 < s_2 = \frac{5}{6} \quad \text{und} \quad |\ln 2 - s_3| < a_4 = \frac{1}{4}$$

Die Zahl e

In einer Aufgabe des 5. Übungsblattes wird gezeigt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existiert. $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Es gilt: $e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

Das erhält man so: setze $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

1. Schritt: Es gilt $a_n \le b_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad (1)$

2. Schritt: $b_n \le e \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (2)$

Da $(b_n)\uparrow$, folgt mit Satz 3, dass $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

$(1) \xrightarrow{(n\to\infty)} e \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$, $(2) \xrightarrow{(n\to\infty)} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \le e$ ✓

Bemerkung: $0 < e - b_n < \frac{1}{n(n!)}$, $n = 1,2\ldots$

Satz 9 (Cauchy Kriterium)

Die Folge (a_n) ist konvergent genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ derart, dass
$|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n,m \ge N(\varepsilon)$ ist.

Beispiele:

1) $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1 =: \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}$

2) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$ ist konvergent

3) $0,\overline{9} = 9\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 1$

9. Kapitel Reihen

(a_n) sei eine Zahlenfolge. Die Folge (s_n): $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt **Reihe** und wird durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls die Folge (s_n) ("die Folge der Partialsummen der Reihe") konvergiert.

$\lim_{n\to\infty} s_n$ heißt Wert der Reihe: $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

In diesem Sinn ist z. B. e der Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Satz 1: Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(Aus $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ folgt die Divergenz der Reihe)

Satz 2 (Cauchy Kriterium für Reihen; Satz 9 / S. 26)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass aus $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq N(\varepsilon)$ $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ folgt.

(In anderen Worten:
Jedes aus einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ herausgeschnittene Teilstück $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m$
wird beliebig klein, wenn es nur mit einem hinreichend großen Index beginnt.
Besitzt umgekehrt eine Reihe diese Eigenschaft, so ist die Reihe konvergent.)