11. Kapitel Stetigkeit

1. Grenzwert einer Funktion in einem Punkt

Es seien $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$, $a \in G$ und $f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion:

$\lim\limits_{\substack{z \to a \\ (z \in G\setminus\{a\})}} f(z) = A \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in G$ mit $0 < |z - a| < \delta$ gilt: $|f(z) - A| < \varepsilon$

$\overset{\text{Satz 1}}{\Longleftrightarrow}$ für jede Folge (z_n), $z_n \in G \setminus \{a\}$ mit $z_n \to a$ $(n \to \infty)$ gilt $f(z_n) \to A$ $(n \to \infty)$.

<u>Beispiele</u>: 1) Für $f(x) = [x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$ existiert $\lim\limits_{x \to k} [x]$ für kein $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\lim\limits_{z \to 0} \exp(z) = 1$

Ü 3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = 6$

<u>Bemerkungen</u>: 1) $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $a \in I$.

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I, x > a}} f(x) = A \Longleftrightarrow$ Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit: Aus $a < x < a + \delta$ folgt $|f(x) - A| < \varepsilon$.

heißt <u>rechtsseitiger Grenzwert</u> von f in a.

Ü: Definiere: <u>linksseitiger</u> Grenzwert: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$.

Es gilt $\lim\limits_{x \to 1+} [x] = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-} [x] = 0$.

2) $f: I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \quad \overset{Def}{\Longleftrightarrow}$ Zu jeder Zahl $C > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in I$ mit $0 < |x-a| < \delta$ gilt: $f(x) > C$.

Ü: Definiere: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Beispiele: 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \quad \overset{Def}{\Longleftrightarrow}$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $M > 0$ mit:
Aus $x > M$ folgt: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Ü: Definiere: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}$ fest$)$.

---

2. Stetigkeit

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ wie oben, $f: G \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion und $a \in G$.

Def: f heißt stetig in a, falls $\lim\limits_{z \to a} f(z) = f(a)$ gilt.

f ist stetig in $a \Longleftrightarrow$ es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass aus $z \in G$ und $|z-a| < \delta$ folgt: $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

$\Longleftrightarrow$ für jede Folge (z_n), $z_n \in G \setminus \{a\}$ mit $z_n \to a \ (n \to \infty)$ gilt $f(z_n) \to f(a) \ (n \to \infty)$.

Ist f in jedem Punkt von G stetig, so sagen wir: <u>f ist in G stetig</u>. Die Menge der in G stetigen Funktionen wird durch <u>$C^0(G)$</u> bezeichnet.

<u>Folgerung</u>: Ist $f: G \to \mathbb{C}$ in $a \in G$ stetig und gilt $f(a) \neq 0$, so hat man $f(z) \neq 0$ für alle z aus einer Umgebung $\{z \mid |z-a| < \delta\}$ von a.

<u>Beispiele</u>: 1) $f(z) = c$ (konst) ist für alle z stetig

2) $f = id_{\mathbb{C}}$ ist in $\mathbb{C}$ stetig

3) $f = \exp$ ist in 0 stetig (Beispiel 2), S. 34)

<u>Satz 2</u>: $f, g: G \to \mathbb{C}$ seien in a stetige Funktionen. Dann sind die Funktionen $f+g$, fg, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$ konst),

$$\frac{f}{g}: \{z \mid g(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad (g(a) \neq 0)$$

in a stetig.

<u>Beispiele</u>: 4) $f = \exp$ ist in jedem $a \in \mathbb{C}$ stetig

5) Alle Polynome und alle rationalen Funktionen (= Quotient von Polynomen) sind in ihrem Defbereich stetig.

6) f mit $f(z) = |z|$ ist stetig für jedes $z \in \mathbb{C}$

<u>Satz 3</u>: $f: G \to \mathbb{C}$, $g: \tilde{G} \to \mathbb{C}$ seien gegebene Funktionen. Es gelte: $f(G) \subset \tilde{G}$, f sei in $a \in G$ und g in $f(a)$ stetig. Dann ist $g \circ f$ in a stetig.

<u>Beispiele</u>: 7) Ist $f: G \to \mathbb{C}$ stetig, so ist $|f|$ auf G stetig.

8) f mit $f(x) = \exp(x^2)$ ist stetig in jedem $x \in \mathbb{R}$,

Satz 4 (Zwischenwertsatz)

Es sei $a < b$ und $[a,b]$ ein (abgeschlossenes und beschränktes) Intervall. Es sei $f \in C^0([a,b])$ und es gelte für $c \in \mathbb{R}$: $(f(a)-c)(f(b)-c) < 0$
(d.h.: c ist eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$).
Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = c$.

Beispiel: Es sei $\alpha > 0$ eine gegebene Zahl und $n \in \mathbb{N}$ und $P(x) = x^n - \alpha$.
Dann gibt es genau eine positive Zahl x_0, für die $P(x_0) = 0$ gilt. ($x_0 := \sqrt[n]{\alpha}$).

Folgerung: Es sei $f \in C^0([a,b])$ $\uparrow$(streng) (oder $\downarrow$(streng)).
Dann ist $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) bijektiv.

("Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird genau einmal angenommen")

Satz 5: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\uparrow$(streng). Dann gilt für die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$:
f^{-1} ist stetig und $\uparrow$(streng). (Formuliere für den Fall, dass f $\downarrow$(streng) ist)

Beispiel: $k \in \mathbb{N}$ $f(x) = x^k$

k ungerade: Für $f(x) = x^k$ gilt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\uparrow$(streng), stetig
Die somit definierte Umkehrfunktion
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\uparrow$(streng) und stetig. Sie wird durch $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$ bezeichnet.

k gerade: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$: $f_1 = f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist $\uparrow$(streng)
$f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_1^{-1} = \sqrt[k]{x}$ $\uparrow$(streng)
$f_2 = f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ ist $\downarrow$(streng): $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt[k]{x}$.

Es sei f auf G (siehe oben) definiert, es sei $a \in G$.
Es sei f in $G \setminus \{a\}$ stetig. f hat in a eine <u>hebbare Unstetigkeit</u>, falls $\lim_{z \to a} f(z)$ existiert aber $\neq f(a)$ ist.

Die durch
$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ \lim_{z \to a} f(z), & z = a \end{cases}$$
definierte Funktion $\tilde{f}$ ist in a stetig und stimmt für $z \neq a$ mit f überein. $\tilde{f}$ heißt <u>stetige Fortsetzung von f auf G.</u>

<u>Beispiele</u>: 1) $f(x) = \operatorname{sign}^2(x)$, $\tilde{f}(x) = 1$. ($x=0$ ist hebbare Unst.)

2) $f(x) = \frac{x+x^3}{x}$ $(x \neq 0)$, $\tilde{f}(x) = 1+x^2$ ($x=0$ ist hebb. U.)

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$, $\tilde{f}(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ ($x=1$ ist h. U.)

4) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, die Unstetigkeit $x=0$ ist nicht hebbar.

<u>Satz 6</u>. Es sei $f \in C^0([a,b])$. Dann gelten:
1) f ist beschränkt. D.h.: Es gibt eine Zahl K mit
$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b].$$
2) f nimmt auf $[a,b]$ den größten und den kleinsten Wert an. D.h.: es gibt $x_0, \tilde{x}_0 \in [a,b]$ mit $f(\tilde{x}_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [a,b]$.
$\left(f(\tilde{x}_0) = \min\{f(x), x \in [a,b]\}, f(x_0) = \max\{f(x), x \in [a,b]\}.\right)$

<u>Bemerkungen</u>: 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0,1]$ stetig aber unbeschränkt

2) $g(x) = x$ ist auf $(0,1)$ stetig, beschränkt, nimmt weder sup noch inf an

3) $g(x) = x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig, ist nicht beschränkt und nimmt weder sup noch inf an.