12. Kapitel: Funktionenfolgen. Punktweise Konvergenz. Gleichmäßige Konvergenz. Potenzreihen.

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ eine Menge, etwa $G = \{z \mid |z-a| < d\}$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion $f_n : G \to \mathbb{C}$ gegeben.
(f_n) heißt Funktionenfolge auf G.
Existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ für jedes $z \in G$, so heißt (f_n) auf G punktweise konvergent. Es ist dann durch $z \to \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ eine (Grenz)Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ definiert.

Eine punktweise auf G gegen f konvergente Folge (f_n) heißt auf G gleichmäßig gegen f konvergent, falls

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_G |f_n(z) - f(z)| \right) = 0$$

gilt. Das ist gleichwertig mit: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein (von $z \in G$ unabhängiges) $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ wird für alle $z \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Bemerkung: $\mathcal{F} := \{ f \mid f : G \to \mathbb{C} \}$,

$$\|f\|_\infty := \sup_G |f(z)|.$$

Ü: Es gelten: $\|f\|_\infty > 0 \iff f \neq 0 \qquad f \in \mathcal{F}$

$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty \qquad \lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{F}$

$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \qquad f, g \in \mathcal{F}$.

Mit dieser Bezeichnung können wir formulieren:

$$f_n \to f \ (n \to \infty) \text{ gleichmäßig auf } G \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Beispiele: 1) $G = \mathbb{C}$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$: $f(z) = \exp(z)$.

2) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$: $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$.

3) $G = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$, $f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ $\therefore f(x) = 0,\ 0 \le x \le 1$

4) $G = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$, $f_n(x) = x^n$ $\therefore f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$,

<u>Satz 1</u> Es sei $G \subset \mathbb{C}$ und $f_n : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, seien auf G definierte und dort stetige Funktionen. Aus "$f_n \to f$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf G" folgt, dass f auf G stetig ist.

Ist (f_n) eine Funktionenfolge auf G, so heißt die Folge (s_n): $\quad s_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$ <u>Funktionenreihe auf G</u>. Für (s_n) wird auch $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ geschrieben. <u>$\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ heißt auf G gleichmäßig konvergent</u>, falls die Folge (s_n) auf G gleichmäßig konvergent ist, d.h. auch (vgl: S.26, Satz 1, S.27, Satz 2):

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass aus $m > n \ge N$ $\quad \left\| \sum_{j=n+1}^{m} f_j \right\|_\infty \left(= \| s_m - s_n \|_\infty \right) < \varepsilon$ folgt.

<u>Satz 2</u> (<u>Majorantenkriterium</u>. Vgl auch S.29, Satz 6)
Die Funktionenfolge (f_n) auf G und die Zahlenfolge (c_n) seien gegeben. Es sei $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ konvergent und für jedes $z \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $|f_n(z)| \le c_n$ erfüllt. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ absolut und gleichmäßig auf G.

<u>Beispiele</u>: 1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-x^2\nu}$ ist auf $1 \le x \le 2$

gleichmäßig konvergent gegen $f(x) = \frac{1}{1-e^{-x^2}}$.

2) $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ ist auf $|z|<1$ (punktweise)

gegen $f(z) = \frac{1}{1-z}$ konvergent, aber nicht gleichmäßig. Für jedes $\rho \in (0,1)$ ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ auf $|z| \le \rho$ gleichmäßig konvergent.

<u>Potenzreihen</u>

Ist (a_ν) eine Zahlenfolge, so heißt die Funktionenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ <u>Potenzreihe um z_0</u>.

O.B.d.A. wird $z_0 = 0$ gesetzt, so dass untersucht wird

$$(P) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

In $z=0$ liegt Konvergenz vor.

Es sind die $z \in \mathbb{C}$ gesucht, in denen (P) konvergent ist.

<u>Lemma</u>:

<u>1.</u> Ist (P) in z_1 konvergent, so konvergiert (P) für alle z mit $|z|<|z_1|$, und für jede Zahl ρ mit $0<\rho<|z_1|$ ist (P) auf $\{z \mid |z| \le \rho\}$ gleichmäßig und absolut konvergent.

<u>2.</u> Ist (P) in z_2 divergent, so divergiert (P) für alle z mit $|z|>|z_2|$.

<u>Beispiel</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k+1}$ ist konvergent für alle z mit $|z|<1$ (da in $z=1$ Konvergenz besteht) und ist für $|z|>1$ divergent (da für $z=-1$ die Reihe divergiert).

Die Zahl $r := \sup\{|z| \mid (P) \text{ ist in } z \text{ konvergent}\}$ heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe (P) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

In $\mathbb{C}$ ist $\{z \mid |z| < r\}$ der Konvergenzkreis, in $\mathbb{R}$ ist $\{x \mid |x| < r\}$ das Konvergenzintervall.

Satz 3 (Die Bedeutung von r. Umformulierung des Lemmas)

a) 1. $r = 0$ (P) konvergiert nur für $z = 0$.
(Beispiel: $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$)

2. $0 < r < \infty$ (P) konvergiert für alle z mit $|z| < r$ absolut, und für jede Zahl ρ mit $0 < \rho < r$ gilt: (P) ist für alle z mit $|z| \le \rho$ absolut und gleichmäßig konvergent.
Für alle z mit $|z| > r$ ist (P) divergent.
($\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $r = 1$)

3. $r = \infty$ (P) ist auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergent, und für jede Zahl $R > 0$ gilt: (P) ist für alle z mit $|z| \le R$ absolut und gleichmäßig konvergent
($\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$)

b) Für die z mit $|z| = r$ kann hinsichtlich Konvergenz/Divergenz keine allgemeinverbindliche Aussage gemacht werden.
(Für α) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$, γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ ist jeweils $r = 1$. Bei α) liegt für jedes z mit $|z| = 1$ Divergenz, bei β) auf $|z| = 1$ stets Konvergenz vor. Bei γ) haben wir z.B. in $z = i$ (Ü) und $z = -1$ Konvergenz, in $z = 1$ Divergenz).

Satz 4 (Berechnung von r) (vgl. auch Aufgabe 2 vom 6. Ü.blatt)

Es liege (P) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ vor.

a) $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Es gilt $r = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & 0<\alpha<\infty \\ 0, & \alpha = \infty \\ \infty, & \alpha = 0 \end{cases}$.

b) Sind alle $a_n \neq 0$ und existiert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so

gilt $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Beispiele: 1) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k+2}}{\sqrt{k-1}} (z-z_0)^k$

$r = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Konvergenz für $|z-z_0| < \frac{1}{4}$,

Divergenz für $|z-z_0| > \frac{1}{4}$.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (z-z_0)^k$

$r = 2 \longrightarrow$ Konvergenz für $|z-z_0| < 2$,

Divergenz für $|z-z_0| > 2$.

Bemerkung (Potenzreihen stellen innerhalb ihres Konvergenzbereichs stetige Funktionen dar)

Hat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius r, so ist

durch $p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z| < r$ die Funktion p

definiert. p ist auf $\{z \mid |z| < r\}$ stetig.