Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Ü: Rechne nach: $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$, $n=2,3,\dots$

und verwende von früher: $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 4$ $k=1,2,\dots$

Aus beidem folgt leicht $\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{4}$.

Der Identitätssatz für Potenzreihen

Es sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z|<r$ konvergent. Es existiere eine Folge $(z_k)_k$ mit $0<|z_k|<r$, $f(z_k)=0$ $\forall k$ und $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$. Dann folgt: $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, also $f=0$.

Der Satz wird häufig wie folgt angewendet (Koeffizientenvergleich):

Aus $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ für $|z|<r$ folgt: $a_j = b_j$ $\forall j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Beispiele: 1) Ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $|z|<r$, eine gerade Funktion, so gilt $a_{2l+1} = 0$ $l=0,1,2,\dots$.

2) Es sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z|<r$ und $a_0 \neq 0$.

Für die b_k in der Entwicklung $\frac{1}{f(z)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ erhält man durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich mit $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \dots$ die Rekursionsformeln: $b_0 = \frac{1}{a_0}$

$$b_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{l=0}^{k-1} a_{k-l}\, b_l \,, \quad k=1,2,\dots$$

3) Schreibt man $(\exp(z))^2 = \exp(z)\cdot\exp(z) = \exp(2z)$, so erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\frac{2^k}{k!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(k-n)!}\,\frac{1}{n!} \,, \quad k=0,1,\dots$$

13. Kapitel Die elementaren Funktionen

1. Exponentialfunktion und Logarithmus

Wir verwenden Bezeichnungen und Ergebnisse aus dem 10. Kapitel.

— Eine Verallgemeinerung von Satz 3d) / S. 32 ist:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots$$

— Es ist (7. Ü, A 1) $\exp : \mathbb{R} \to \{x \mid x > 0\}$ bijektiv.

Weiter haben wir (10./11. Kapitel), dass exp ↑ (streng) und stetig ist. Die somit definierte Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ ist der natürliche Logarithmus: $\ln : \{x \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$

ln ist stetig, ↑ (streng). Es gelten $\ln(e^x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, und $e^{\ln(x)} = x$, $x > 0$. Man liest ab $\ln(e) = 1$, $\ln(1) = 0$, und folgert $\ln(x) > 0$ für $x > 1$ und $\ln(x) < 0$ für $0 < x < 1$.

Es gelten: $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$.

Satz 1 a) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $x > 0, y > 0$.

($\Rightarrow$ $\ln(x^n) = n \ln(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x > 0$)

b) Für $k \in \mathbb{N}$ hat man: $\lim_{x \to \infty} x^{-k} \ln(x) = \lim_{x \to 0+} x^k \ln(x) = 0$.

Def (Die allgemeine Exponentialfunktion)

$a > 0$: $\quad y = a^x := e^{x \ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$

Es gelten: $\ln(a^x) = x \ln(a)$, $x \in \mathbb{R}$,

$a^x > 0 \; \forall x$, $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x a^y$,

$(a^x)^y = a^{xy}$, $\quad x^{(x^x)} \neq (x^x)^x \quad (x > 0)$,

$\quad \overset{\shortparallel}{e^{e^{x \ln(x)} \ln(x)}} \qquad \overset{\shortparallel}{e^{x^2 \ln(x)}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a), \quad y = a^x \text{ ist stetig } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Falls $0<a<1$, ist $a^x \downarrow$ (streng) $: \mathbb{R} \to \{x \mid x>0\}$

falls $a>1$, ist $a^x \uparrow$ (streng) $: \mathbb{R} \to \{x \mid x>0\}$

Die somit für $a \neq 1$ definierte Umkehrfunktion wird durch $\log_a(\cdot)$ bezeichnet:

Es sei $a>0, a \neq 1$, fest. $\log_a : \{x \mid x>0\} \to \mathbb{R}$

$$x \to \log_a(x)$$

ist stetig. Es gelten:

$$\log_a(a^x) = x,\ x \in \mathbb{R} \text{ und } a^{\log_a(x)} = x,\ x>0.$$

$\to \log_a(a) = 1$ und $\log_a(1) = 0$.

Es gilt $\log_e = \ln$.

Für $x>0, a>0, b>0$ gilt: $\underline{\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(x)}$.

---

2. <u>Hyperbelfunktionen</u> (s. Ü-Blatt) $\sinh, \cosh, \tanh, \coth$ mit den Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}$.

---

3. <u>Die trigonometrischen Funktionen</u> (siehe auch 10. Kapitel)

<u>Erinnerung:</u>

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},\ z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right),\ z, w \in \mathbb{C}$$

Hiermit und mit dem Leibniz Kriterium (Kap 8, Satz 8, S. 25) und dem Zwischenwertsatz (Kap 11, Satz 4, S. 37) erhält man

<u>Satz 2</u>: $y = \cos(x), x \in \mathbb{R}$, hat im Intervall $(0,2)$ genau eine Nullstelle x_0. Hieran macht man sich klar:

1. $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$ ($\to$ es gibt eine Nullstelle in $(0,2)$)
2. $\cos \downarrow$ (streng) auf $(0,2)$ ($\to$ es gibt nur eine Nullstelle)

Def: $\pi = 2x_0$

Wir lesen von oben ab $0 < \pi < 4$ und $\sin\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{6} > 0$

(unter 2. in Satz 2 wird $\sin x \geq \frac{x}{3}$ für $0 \leq x \leq 2$ nachgewiesen)

Es folgt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ \forall z$.

Satz 3 $e^{i\pi k} = (-1)^k$, $e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = i(-1)^k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vergleichen von Real- und Imaginärteil links und rechts ergibt:
$\sin \pi k = 0$, $\cos \pi k = (-1)^k$, $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$.

Folgerungen: 1) $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ $(z \in \mathbb{C})$: exp ist ~~2π~~ $2\pi i$-periodisch
$\longrightarrow$ sin und cos sind 2π-periodisch.

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \cos(z)$ $(z \in \mathbb{C})$

arc sin (Umkehrfunktionen des Sinus)

sin ist streng monoton auf den Intervallen $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$. Der k-te Zweig der Umkehrfunktion von $y = \sin(x)$ wird durch $\arcsin_k$ bezeichnet:

$$\arcsin_k : [-1, +1] \longrightarrow [k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Es gilt $y = \arcsin_k(x)$, $x \in [-1, +1]$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \sin(y), \quad y \in [k\pi - \tfrac{\pi}{2}, k\pi + \tfrac{\pi}{2}]$$

$\operatorname{Arc\,sin}(x) := \arcsin_0(x)$ heißt Hauptzweig des arc sin.

arc cos (Umkehrfunktionen des Cosinus)

cos ist streng monoton auf den Intervallen $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\arccos_k : [-1, +1] \longrightarrow [k\pi, (k+1)\pi]$ ist die Umkehrfunktion

von $\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1,+1]$, Es gilt

$$y = \arccos_k(x) \quad , x \in [-1,+1]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$x = \cos y \quad , y \in [k\pi, (k+1)\pi].$$

$\operatorname{Arc}\cos(x) := \operatorname{arc}\cos_0(x)$ heißt Hauptzweig des arc cos

analog behandelt man die Umkehrfunktionen von
$y = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Satz 4 : $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$

Beispiele: Die Nullstellen von sin, cos sind im Komplexen dieselben wie im Reellen:

$$\sin z = 0 \iff z_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos z = 0 \iff z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Die Nullstellen von $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ sind im Reellen nur 0 und im Komplexen $z_k = k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ hat im Reellen keine Nullstellen und im Komplexen die Nullstellen $z_k = (2k+1)i\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Das sieht man durch Zurückführen auf Satz 4 oder indem man sich überlegt

$$\sinh(z) = -i\sin(iz) \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \cos(iz)$$

und die Nullstellen von sin und cos von oben verwendet.